MAESTRÍA EN INGENIERÍA Y GESTIÓN AMBIENTAL

CURSO: SIMULACIÓN DE SISTEMAS AMBIENTALES

PROFESOR: M.I. Jorge Antonio Polanía P.

CONTENIDO

- INTRODUCCIÓN
- MÓDULO 1: TEORÍA GENERAL DE SISTEMAS
- MÓDULO 2: PROCESOS CON MATLAB
- MÓDULO 3: PROCESOS CON SIMULINK
- MÓDULO 4: APLICACIONES

INTRODUCCIÓN

Los modelos de simulación ambiental son herramientas que permiten simular el comportamiento de sistemas a partir de los datos de tipo físico, químico e hidrológico que caracterizan al sistema y de las complejas interrelaciones existentes entre los mismos, formuladas en forma de algoritmos matemáticos.

El desarrollo tecnológico ha propiciado la utilización y el auge de los modelos matemáticos y entre ellos, los denominados modelos numéricos de simulación por computador. Esta tipología de modelos se caracteriza por:

1. La relativa economía de su desarrollo.
2. La flexibilidad a la hora de conformar la red de interrelaciones existentes entre los parámetros ambientales.
3. La facilidad a la hora de introducir modificaciones en los valores de estos parámetros y en las acciones exteriores a que se ve sometido el sistema modelado.
4. La alta precisión en los resultados obtenidos.

Los modelos de simulación se basan en el hecho de que si un determinado modelo es capaz de interpretar un sistema físico cuyos parámetros de entrada y acciones exteriores conocemos, es bastante presumible que será capaz de predecir situaciones futuras, permitiéndonos anticipar en el tiempo la evolución del sistema y tomar las medidas de control adecuadas para garantizar la evolución del sistema dentro de unos límites ambientales aceptables.

Para garantizar el cumplimiento de ese modelo es necesario diseñar una metodología, ampliamente correlacionada por la práctica, indispensable para alcanzar la calidad mínima que requiere la utilización de estas herramientas de modelamiento y simulación.

El primero de los condicionantes consiste en la disponibilidad de datos adecuados, en número y calidad correspondientes al sistema físico modelado. Estos datos se extienden a los parámetros que caracterizan a nuestro sistema, pero también a las medidas de diversa índole correspondientes a las acciones externas a que se ve sometido el sistema.

El desarrollo del modelo requiere la realización previa de un modelo conceptual del sistema que permita abstraer del mismo los elementos más significativos del comportamiento de nuestro interés. En este sentido, es necesario recordar que los modelos son una aproximación de la realidad y que por tanto llevan asociados un determinado error cuya magnitud debemos conocer y asumir como aceptable en función del objetivo perseguido.

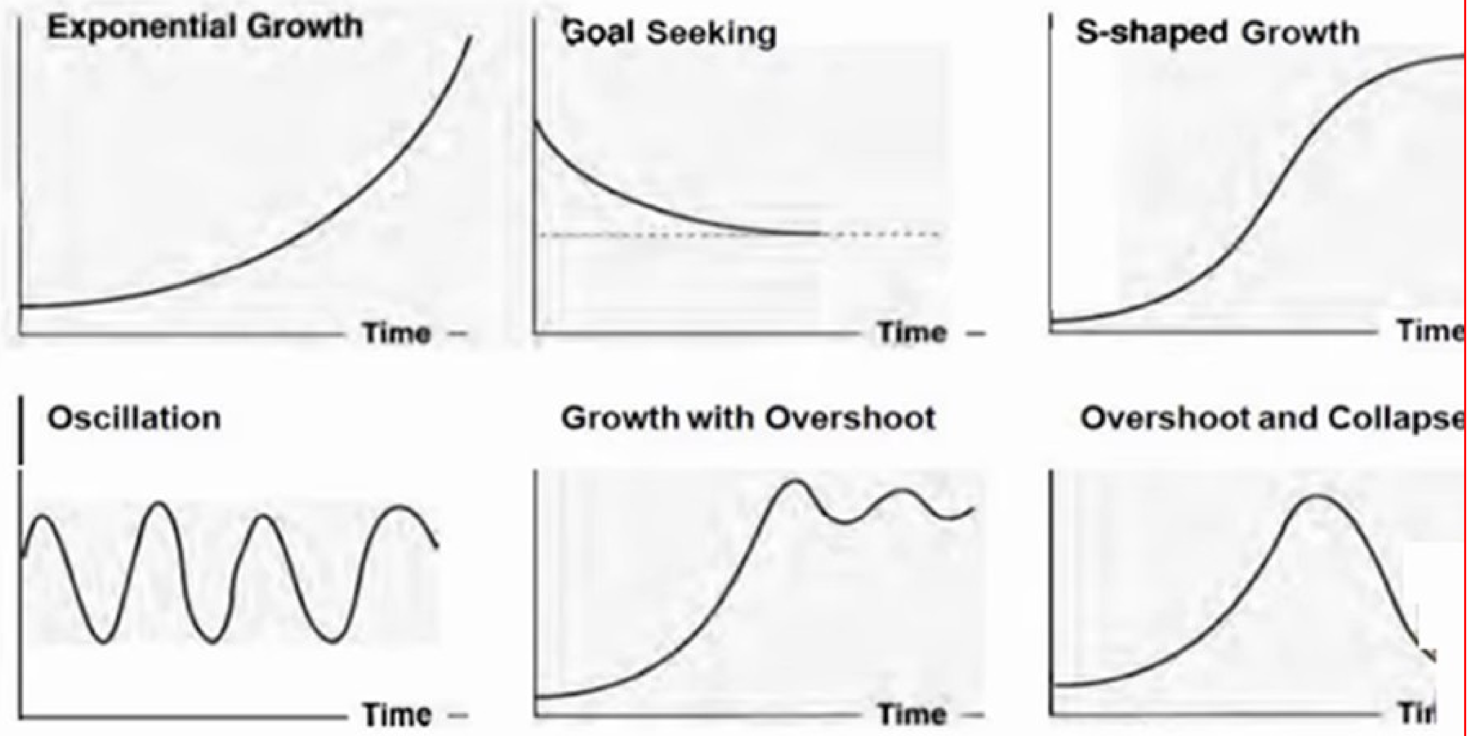
La fase más crítica del desarrollo del modelo consiste en la calibración y el análisis de sensibilidad del sistema. Durante su desarrollo se realizan múltiples simulaciones variando en cada una de ellas los datos de entrada y analizando los resultados producidos por el modelo. La calibración y el análisis de sensibilidad de un modelo son, las etapas más costosas de su elaboración razón por la cual surge la tentación de obviarlas para reducir costos.

Cuando se finalizan las simulaciones a que de lugar, se hacen generalmente predicciones anticipadas en el tiempo, aunque la utilidad del modelo no se limita a este único aspecto predictivo, pudiendo ser realizadas simulaciones sobre situaciones pretéritas para identificar, por ejemplo, el origen histórico de un determinado problema ambiental observado en el presente. Igualmente, puede ser utilizado el modelo para caracterizar el sistema, o sea, cuantificar mediante su uso la magnitud de determinados parámetros del sistema.

COMPORTAMIENTOS DINÁMICOS HABITUALES

- Existen un conjunto de comportamientos o “patrones” que se repiten en todos los sistemas, aunque cambien la escala temporal, los parámetros o las unidades.
- Estos “patrones” de comportamientos son:
  - Crecimiento exponencial
  - Decrecimiento exponencial
  - Convergente a un valor.
  - Crecimiento en forma “Curva-S”
  - Oscilante
  - Sobrepaso y colapso
  - Crecimiento con sobrepaso

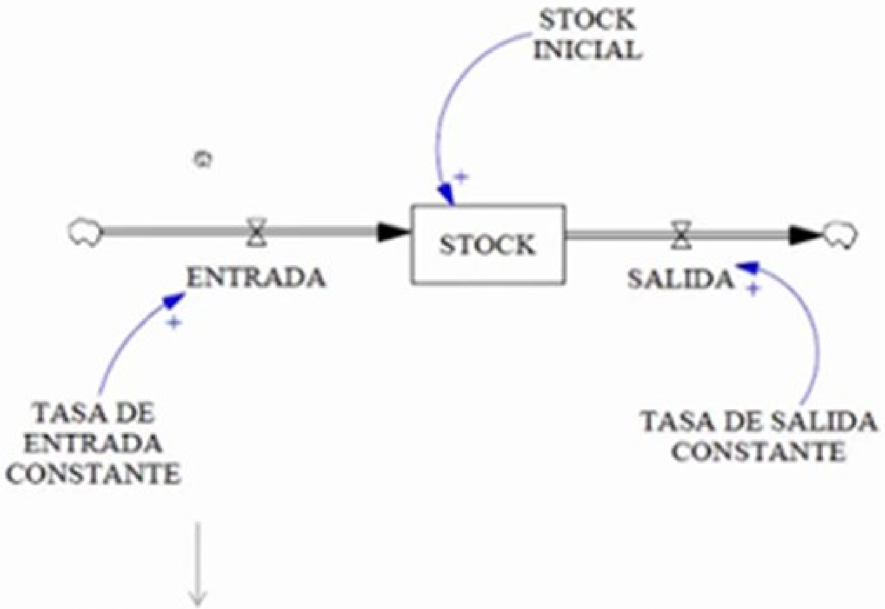
COMPORTAMIENTOS HABITUALES



- Figura tomada de Business Dynamics, de J.D.Sterman

COMPORTAMIENTOS DINÁMICOS HABITUALES

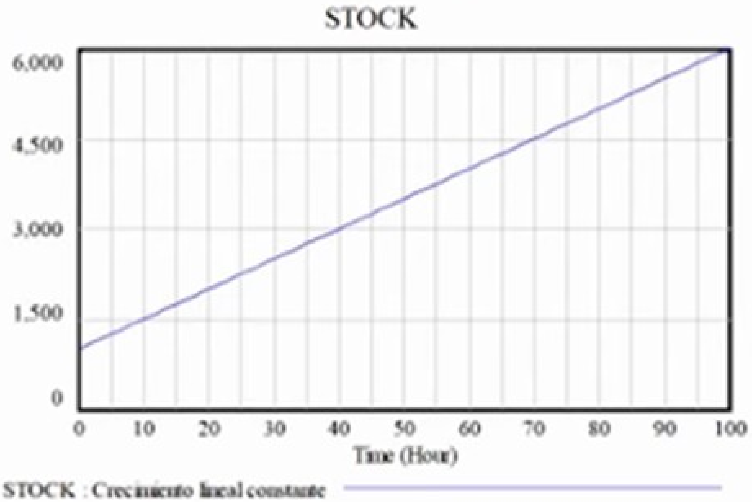
- CRECIMIENTO SIMPLE.



- STOCK INICIAL = 1000
- TASA DE ENTRADA CTE. = 100 unidades por unidad de tiempo
- TASA DE SALIDA CTE. = 50 unidades por unidad de tiempo

COMPORTAMIENTOS DINÁMICOS HABITUALES

- CRECIMIENTO SIMPLE.
  - STOCK INICIAL = 1000
  - TASA DE ENTRADA CTE. = 100
  - TASA DE SALIDA CTE. = 50



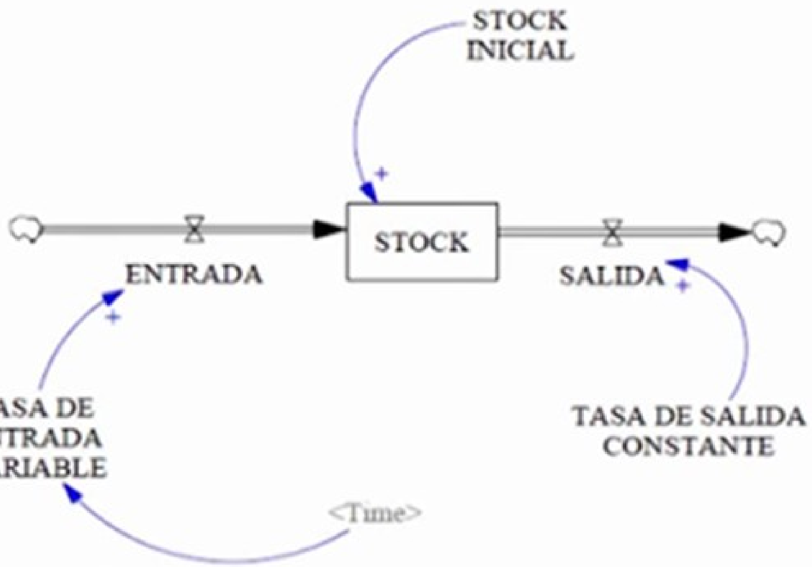
$$\text{STOCK}(t) = \int_0^t [\text{ENTRADA} - \text{SALIDA}]\, dt + \text{STOCK}(t_0) =$$

$$\text{STOCK}(t) = \int_{t_0}^t [100 - 50]\, dt + 1000 = 50t + 1000$$

- Da lugar a un crecimiento lineal de pendiente constante

COMPORTAMIENTOS DINÁMICOS HABITUALES

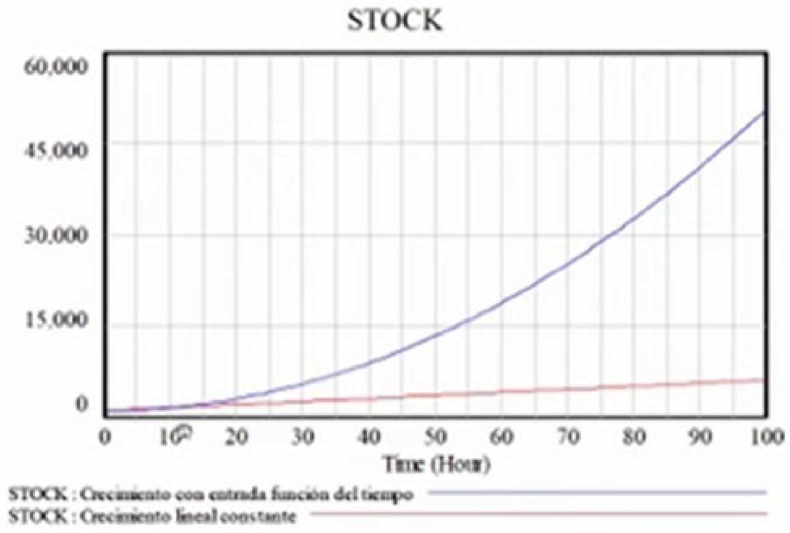
- CRECIMIENTO.



- STOCK INICIAL = 1000
- ENTRADA = 50t + 50
- SALIDA (CTE.) = 50

COMPORTAMIENTOS DINÁMICOS HABITUALES

- CRECIMIENTO.
  - STOCK INICIAL = 1000
  - ENTRADA (t) = $50 \cdot t + 50$
  - SALIDA (CTE.) = 50



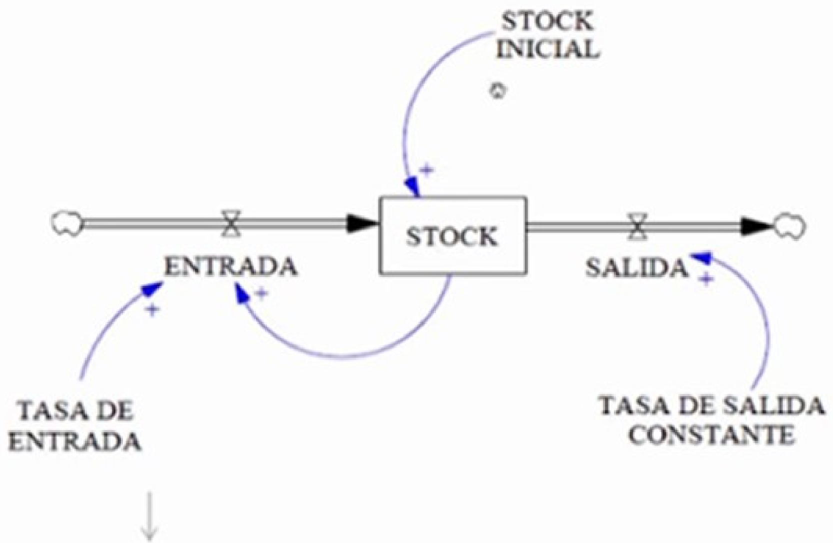
$$\text{STOCK}(t) = \int_0^t [\text{ENTRADA} - \text{SALIDA}]\, dt + \text{STOCK}(t_0) =$$

$$\text{STOCK}(t) = \int_{t_0}^t [50t + 50 - 50]\, dt + 1000 = 25t^2 + 1000$$

- Da lugar a un crecimiento cuadrático

COMPORTAMIENTOS DINÁMICOS HABITUALES

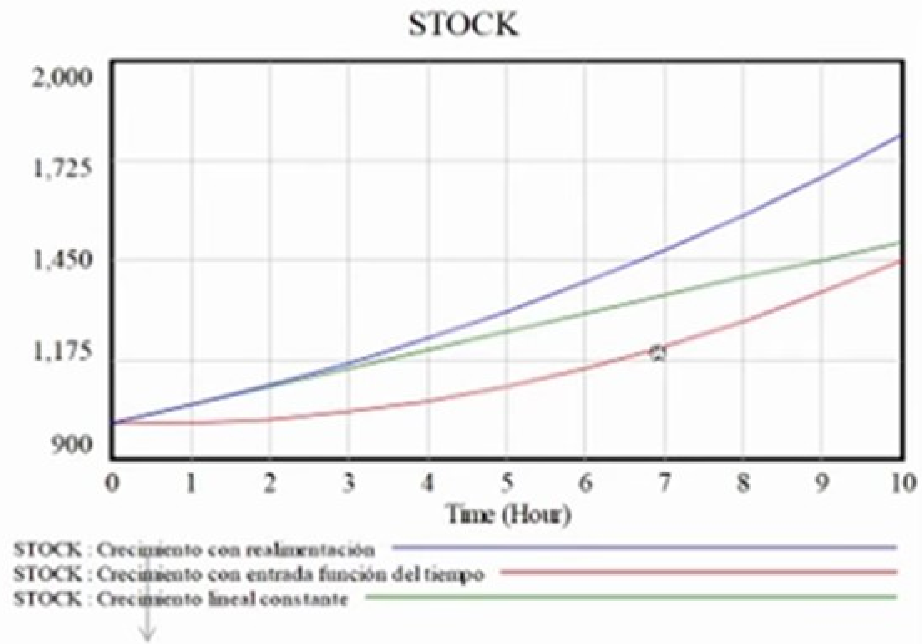
- CRECIMIENTO CON REALIMENTACIÓN



- STOCK INICIAL = 1000
- ENTRADA(t) = 0,1·STOCK(t) ←
- SALIDA (CTE.) = 50

COMPORTAMIENTOS DINÁMICOS HABITUALES

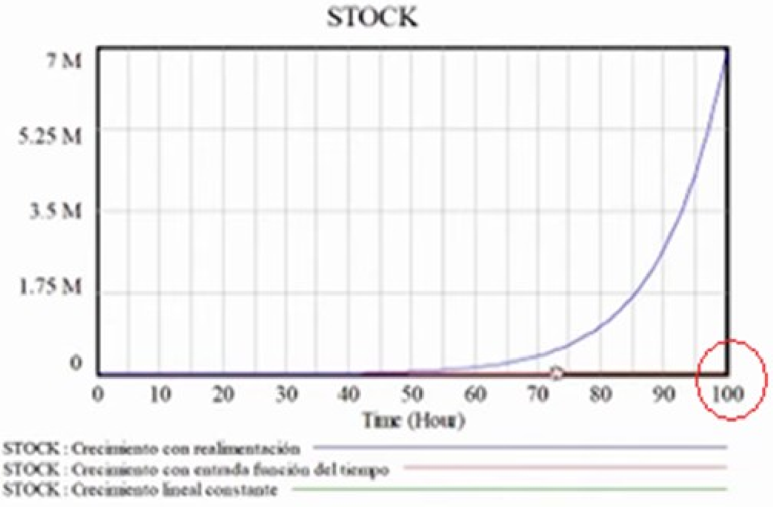
- CRECIMIENTO.
  - STOCK INICIAL = 1000
  - ENTRADA (t) = 0,1·STOCK(t)
  - SALIDA (CTE.) = 50



- ¡PRIMERAS 10 HORAS!

COMPORTAMIENTOS DINÁMICOS HABITUALES

- CRECIMIENTO.



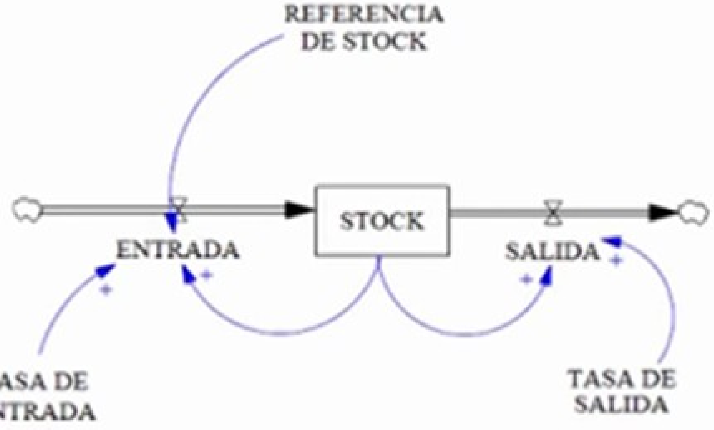
  - STOCK INICIAL = 1000
  - ENTRADA (t) = 0,1·STOCK(t)
  - SALIDA (CTE.) = 50

  - $dS/dt = 0{,}1 \cdot S - 50$ [con $S(t_o) = 1000$ y $t_0 = 0$]
  - $S(t) = 1000 \cdot e^{0{,}1 \cdot t} - 50 \cdot t + 1000$

  - ¡Da lugar a un crecimiento exponencial!

COMPORTAMIENTOS DINÁMICOS HABITUALES

- CONVERGENCIA A VALOR.

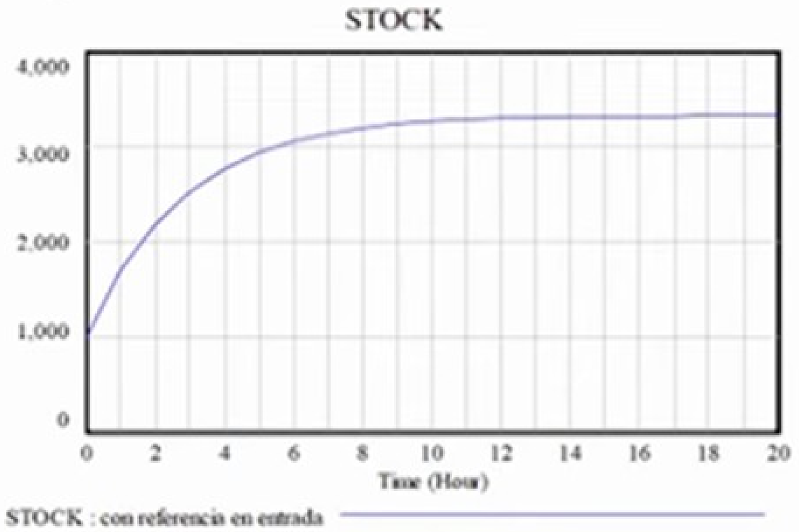


- STOCK INICIAL = 1000
- ERROR(t) = REFERENCIA – STOCK(t)
- Si ERROR(t) < 0, ENTRADA (*t*) = 0,2·ERROR(t)
- SALIDA (*t*) = 0,1·STOCK(*t*)

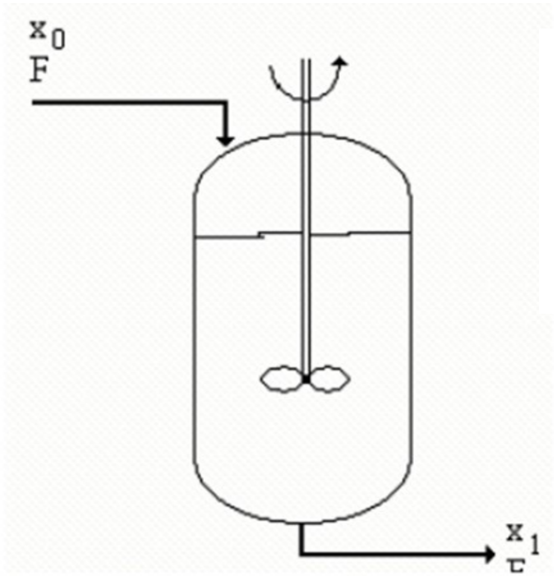
COMPORTAMIENTOS DINÁMICOS HABITUALES

- CONVERGENCIA A VALOR.

  - STOCK INICIAL = 1000
  - ERROR = REFERENCIA – STOCK(t)
  - Si ERROR(t) > 0, ENTRADA (*t*) = 0,2·ERROR(t)
  - SALIDA (*t*) = 0,1·STOCK(*t*)



EJEMPLO: BIOREACTOR



Bioreactor continuo de mezclado perfecto.

$$\left\{\begin{array}{l}\textit{Variación de la}\\ \textit{masa dentro}\\ \textit{del Sistema}\\ \dfrac{dm}{dt}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\textit{Flujo de}\\ \textit{masa}\\ \textit{que entra}\\ \textit{al Sistema}\\ x_0\ F\end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{l}\textit{Flujo de}\\ \textit{masa}\\ \textit{que sale}\\ \textit{del Sistema}\\ x_1\ F\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{l}\textit{aparece}\\ \textit{dentro del}\\ \textit{Sistema por}\\ \textit{crecimiento}\\ \left(\dfrac{dm}{dt}\right)_G\end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{l}\textit{desaparece}\\ \textit{dentro del}\\ \textit{Sistema}\\ \textit{por muerte}\\ \left(\dfrac{dm}{dt}\right)_D\end{array}\right\}$$

Modelamiento:

$$x_0F - x_1F + \left(\frac{dm}{dt}\right)_G - \left(\frac{dm}{dt}\right)_D$$

Donde,

F: Flujo volumétrico del alimentado y del fluido de salida en lt/hr.
xo: Concentración másica de (m.o.) del alimentado en gr/lt.
x1: Concentración másica de (m.o.) en el fluido de salida en gr/lt.
m: Masa de (m.o.) dentro del tanque en gr.

Ahora la masa del (m.o.) dentro del tanque es:

m=x1*V,   donde V es el volumen efectivo dentro del tanque

Ecuación dinámica:

$$\boxed{\frac{dx_1}{dt} = x_0 D + (\mu_G - \mu_D - D)x_1}$$

D= F/V es velocidad de dilución en lt/hr
μG= Velocidad específica de crecimiento en lt/hr.
μD= Velocidad específica de muerte [L/h].
Si μG>>μD, entonces se simplifica a:

$$\boxed{\frac{dx_1}{dt} = x_0 D + (\mu_G - D)x_1}$$

En régimen estacionario,

$$\boxed{0 = x_0 D + (\mu_G - D)x_1 \qquad x_1 = \frac{D}{D - \mu_G} x_0}$$

Aplicando Transformada de Laplace:

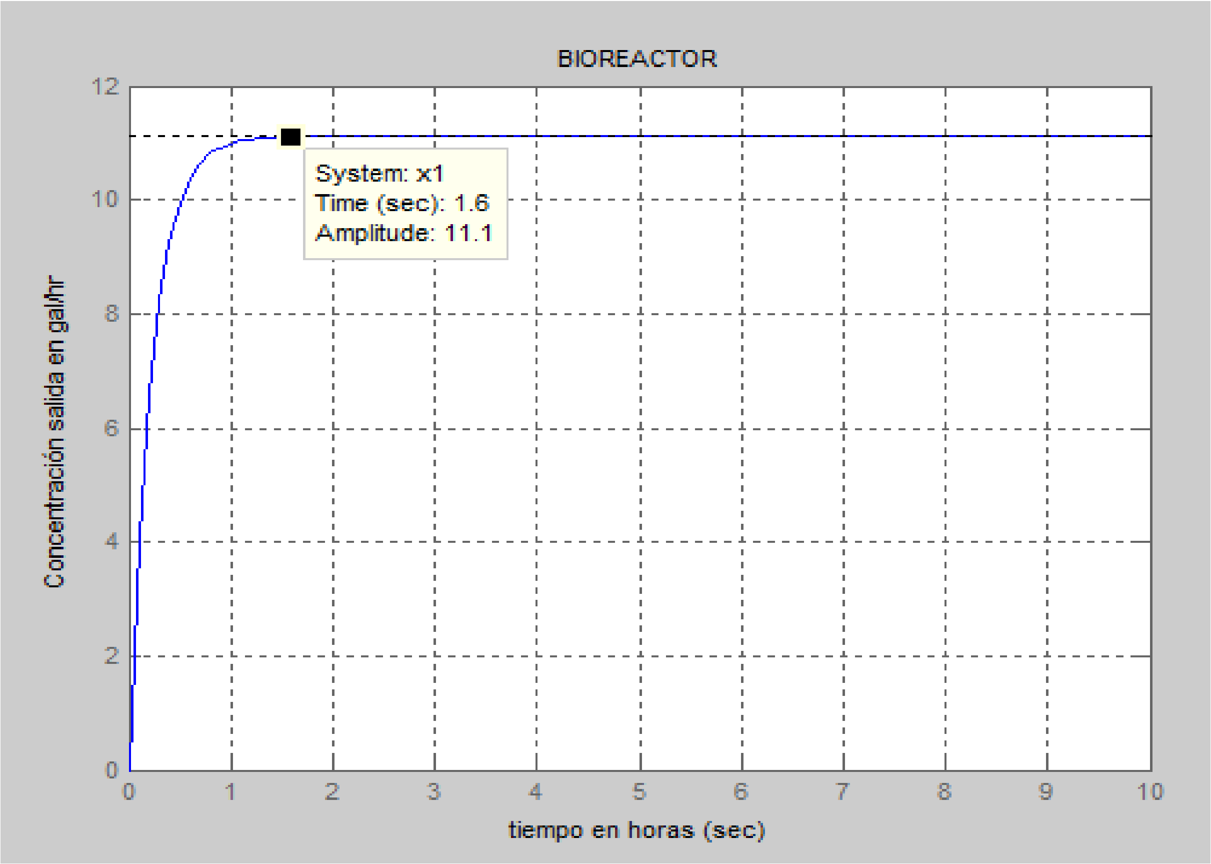
Transformada de Laplace:

$$X_1(s) = \frac{D}{s+(D-\mu_G)}X_0(s)$$

Matlab

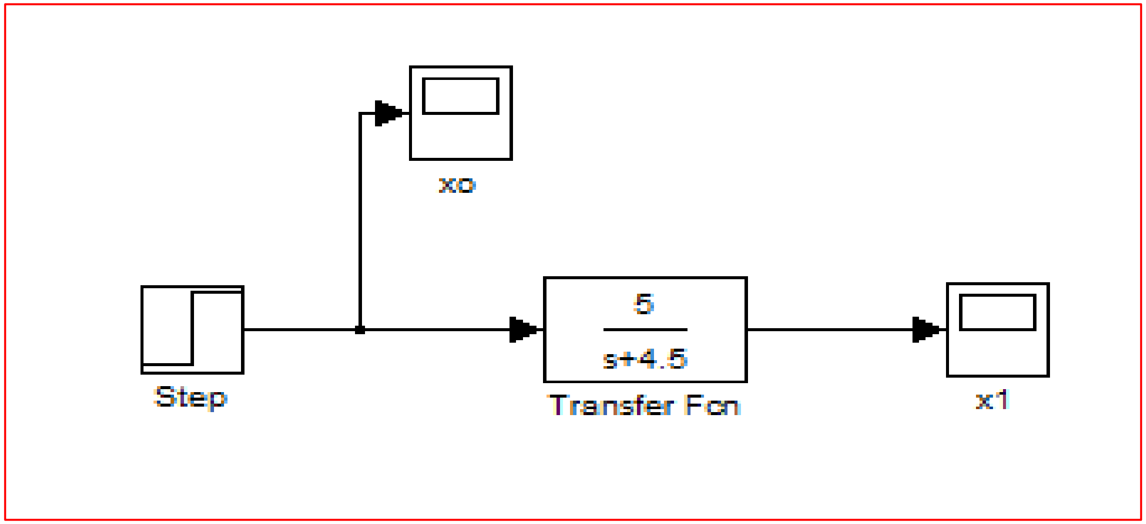
```
% SISTEMA DINÁMICO DE UN BIODIGESTOR
xo=10;      % concentración másica de entrada en gal/lt
D=5;       % velocidad de dilución cuya unidad es lt/hr
muG=0.5;    % Velocidad específica de crecimiento en lt/hr
%x1=D/(s+(D-uG))*xo
num=D*xo;
den=[1 D-muG];
%concentración másica de entrada en gal/lt
x1=tf(num,den);
t=0:0.1:10;
step(t,x1)
title('BIOREACTOR');
xlabel('tiempo en horas');
ylabel('Concentración salida en gal/hr')
grid
```

Simulación

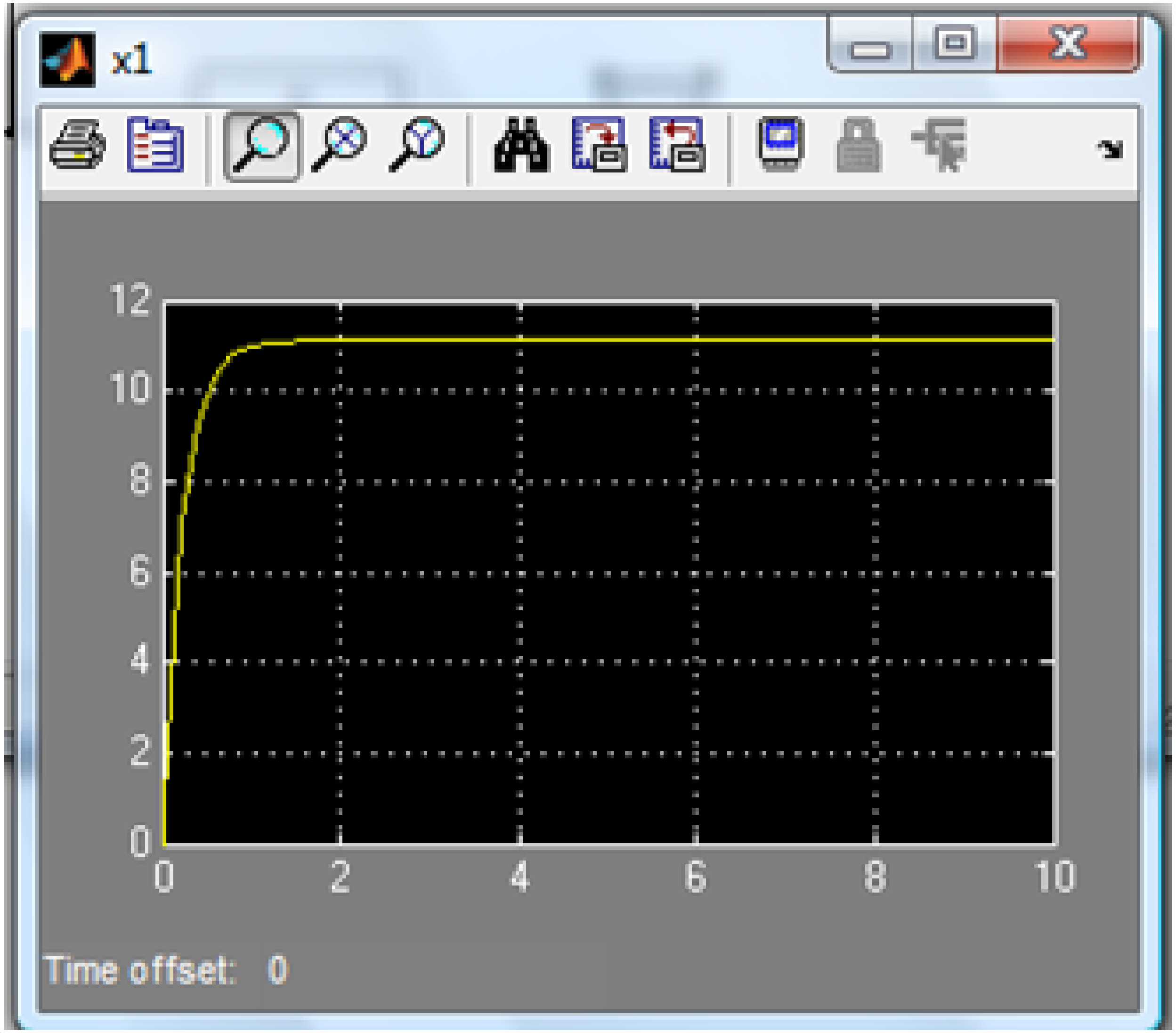


BIOREACTOR
System: x1
Time (sec): 1.6
Amplitude: 11.1
Concentración salida en gal/hr
tiempo en horas (sec)
0
2
4
6
8
10
12
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

Simulink:



Para un bioreactor de fermentación continua $\mu G = 0,5\ h^{-1}$ y $D = 5\ h^{-1}$, si xo= 10 gr/lt, determinar, la respuesta dinámica (variación de la concentración de los m.o.).


x1
12
10
8
6
4
2
0
0
2
4
6
8
10
Time offset: 0

MÓDULO 1:
TEORÍA GENERAL DE SISTEMAS

1. INTRODUCCIÓN
2. TENDENCIAS DE LA TGS
3. TRANSFORMADA DE LAPLACE
4. FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

1. INTRODUCCIÓN

En 1950 el biólogo Ludwin Von Bertalanffy (Autriaco, 1901-1972) desarrolló la Teoría General de Sistemas, como una forma de proporcionar un marco referencial integral e interdisciplinario en los que convergen conocimientos de las ciencias naturales, las matemáticas y las ciencias sociales. Esta teoría permite analizar y comprender los fenómenos de la realidad, mediante la realización de modelos, leyes, ecuaciones que interpretan en forma aproximada la realidad.

1.1 SISTEMA

Un sistema es una combinación de componentes que actúan conjuntamente para alcanzar un objetivo específico. Un sistema es dinámico cuando la salida presente depende de las entradas pasadas y es estático cuando la salida presente depende solamente de las entradas presentes.

1.2 TEORÍA DE SISTEMAS

Estudia los modelos, las leyes y ecuaciones que explican la estructura y el comportamiento del sistema aproximándolo a la realidad.

1.3 OBJETIVOS

Los objetivos de la Teoría General de Sistemas son los siguientes:

1. Impulsar el desarrollo de una terminología que permita describir las características, funciones y comportamiento de los sistemas
2. Desarrollar un conjunto de leyes aplicables a los diferentes modelos
3. Describir matemáticamente estas leyes mediante ecuaciones ya sean lineales o diferenciales

1.4 ESTRATEGIAS

Las estrategias que se implementan en la teoría de sistemas se puede ver desde dos puntos de vista:

1. Del estudio de los componentes del sistema, de cómo interactúan entre sí para el análisis y diseño del sistema
2. Del estudio de la interacción entre el sistema y su entorno.

Estas dos estrategias son complementarias en el estudio de un sistema determinado.

Por ejemplo, si vemos la universidad como un sistema, con el enfoque de la primera estrategia, analizamos sus programas, sus facultades, los institutos de investigación que integra y analizamos sus interacciones entre ellos. Con el enfoque de la segunda estrategia se tiene que analizar la universidad con su entorno, esto es, la calidad de los estudiantes seleccionados, la calidad de los egresados, la relación universidad con el sector externo, etc.

1.5 COMPONENTES DE UN SISTEMA

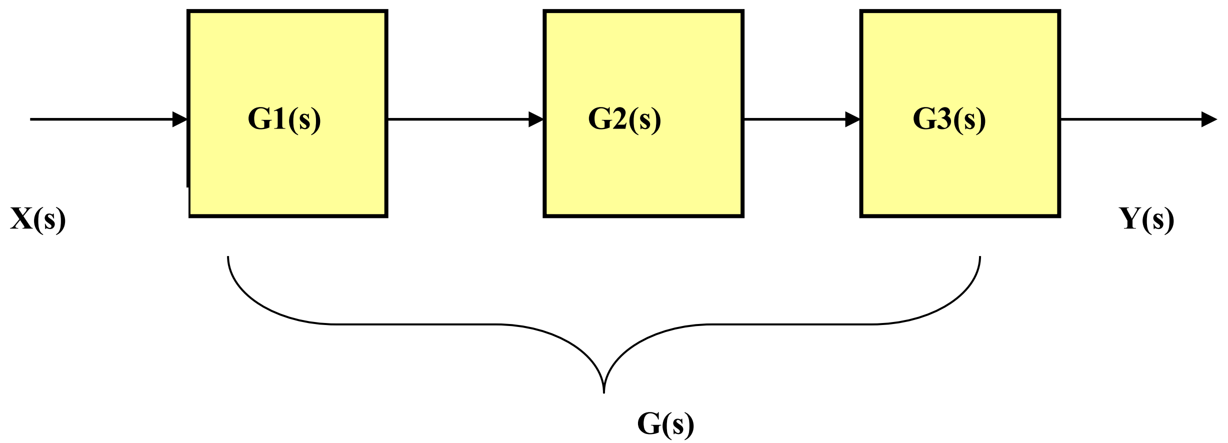
Los componentes básicos de un sistema son:

1. Estructura. Se refiere a las interrelaciones y procesos entre las partes del sistema.
2. Ambiente. Relaciona el sistema con el todo. Es su entorno
3. Entradas. Son las fuentes de energía, recursos e información que necesita el sistema para su funcionamiento y que importa del ambiente
4. Salidas. Son los productos o resultados que se construye a través de la estructura y los procesos internos.

1.6 TIPOS DE ESTRUCTURAS

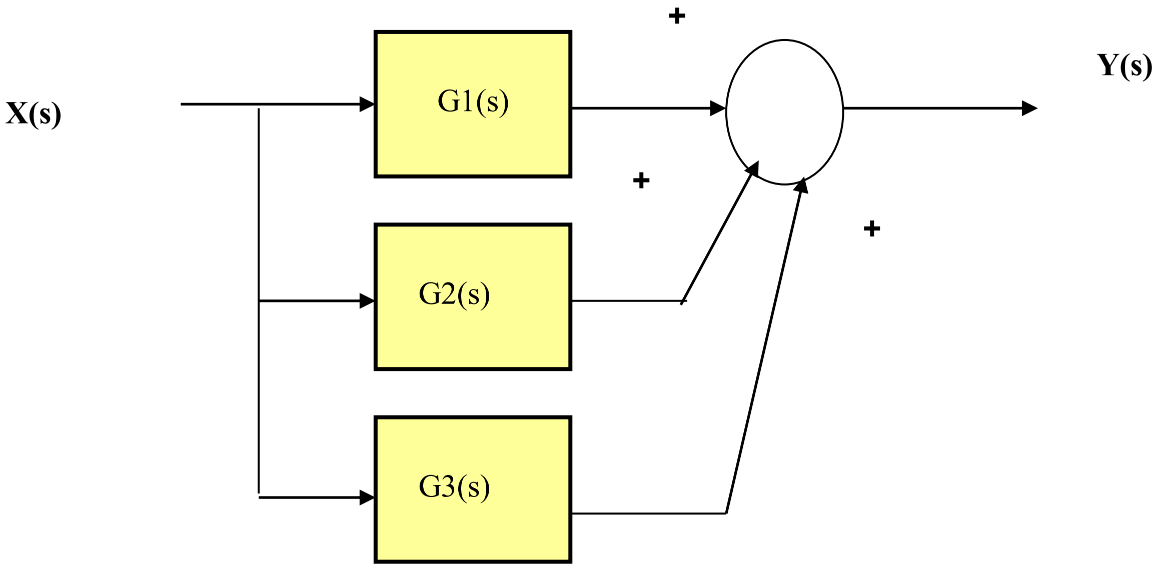
ESTRUCTURA SERIE

Los elementos que conforman su estructura están unos seguidos de otros. La salida de un elemento o subsistema es la entrada del otro y así sucesivamente.



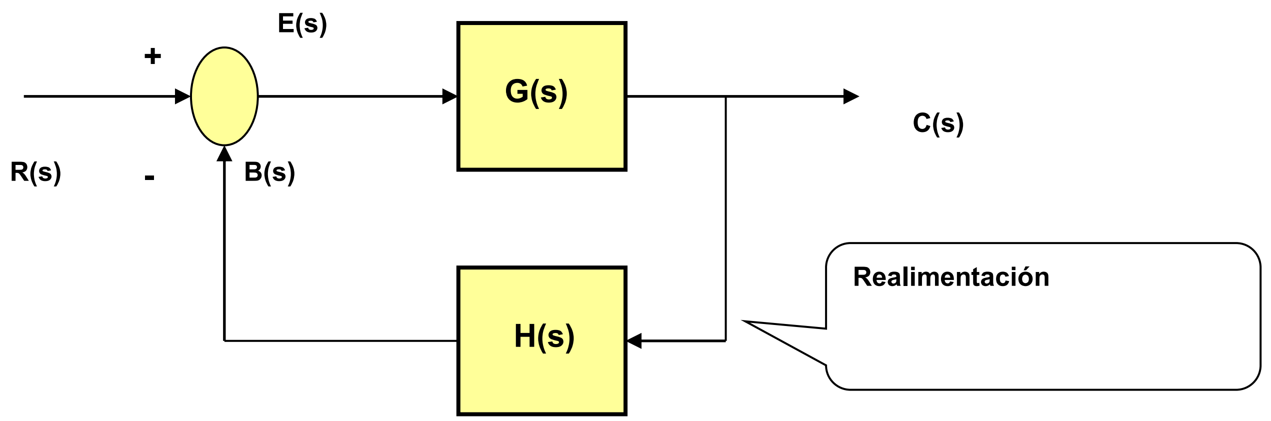
ESTRUCTURA PARALELA

Las entradas de los elementos que componen la estructura llegan simultáneamente al sistema al igual que sus entradas.



ESTRUCTURA REALIMENTADA

En una estructura realimentada, la salida o parte de ella se reinyecta a la entrada, configurándose una realimentación al sistema.



1.7 CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS

Los sistemas pueden clasificarse de las siguientes maneras:

1. Con relación al origen, ellos pueden ser naturales como por ejemplo el sistema nervioso, el sistema solar, etc o pueden ser artificiales como los creados por hombre como las máquinas.
2. Con relación al ambiente, pueden ser sistemas en lazo abierto o sistemas en lazo cerrado o realimentados.

Ejemplo de un sistema hidráulico en lazo abierto y cerrado son los siguientes:

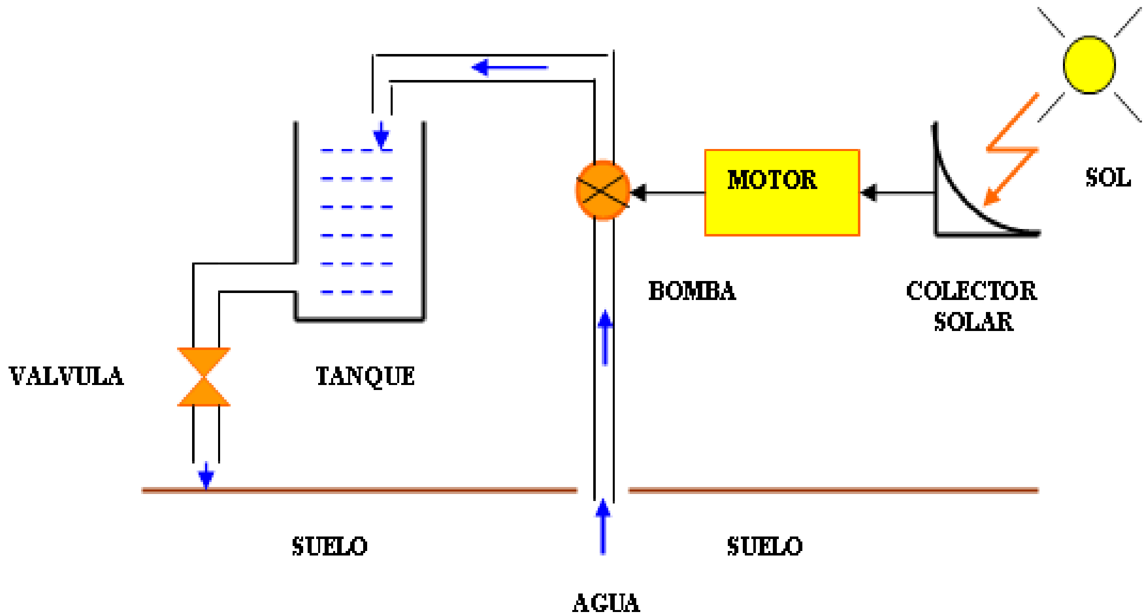


FIGURA: SISTEMA EN LAZO ABIERTO

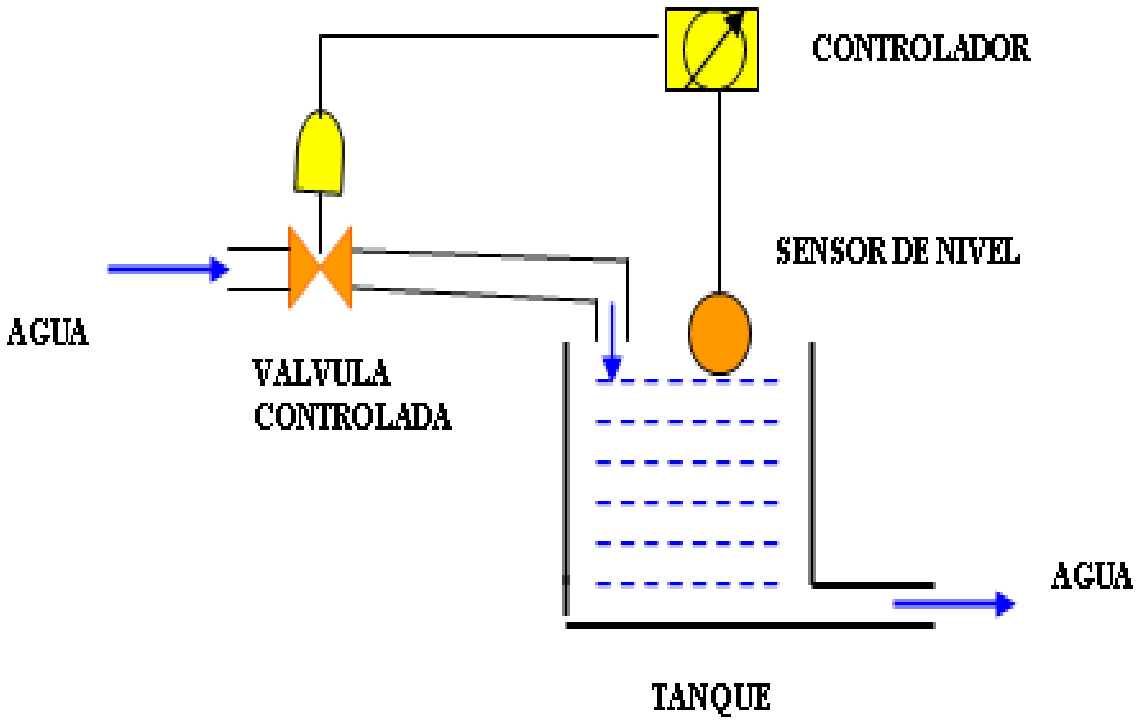


FIGURA: SISTEMA DE LAZO CERRADO

2.TENDENCIAS DE LA TGS

2.1 CIBERNÉTICA

En 1947 Norbert Wiener (sueco, 1894-1964) propuso el nombre de Cibernética como la ciencia de los mandos, esto es, estructuras con elementos electrónicos correlacionados con los mecanismos que regulan la psicología de los seres vivientes y los sistemas sociales humanos.

La Cibernética estudia la organización de las máquinas capaces de reaccionar y operar con mayor precisión y rapidez que los seres vivos. Se ha considerado dividida en dos áreas: La Biónica y la Robótica.

BIÓNICA

Es la ciencia que estudia las máquinas o procesos autocontrolados imitando la vida a través de la biología y la electrónica, También se define como la organización de los seres vivos por su aplicación a las necesidades técnicas como la construcción de modelos de materia viva, particularmente las moléculas proteínicas y los ácidos nucleicos.

Como aplicaciones prácticas, en ésta área de la Cibernética, tenemos el Ojo Biónico, el Oído Biónico, entre otras.

ROBÓTICA

La Robótica es la técnica que aplica la informática al diseño y empleo de aparatos que, en sustitución de personas, realizan operaciones o trabajos, por lo general en instalaciones industriales. Se emplea en tareas peligrosas o para tareas que requieren una manipulación rápida y exacta. En los últimos años, con los avances de la Inteligencia Artificial, se han desarrollado sistemas que desarrollan tareas que requieren decisiones y autoprogramación y se han incorporado sensores de visión y tacto artificial.

2.2 TEORÍA DE LA INFORMACIÓN

La Teoría de la Información es una teoría matemática creada por Claude Shannon (Estados Unidos, 1916-2001) en 1948, base de la teoría actual de la comunicación y codificación. Esta teoría establece los límites de compresión de la información y máxima velocidad de transmisión. Shannon consideró la información codificada de manera digital como una serie de 1's y 0's que se refería como bits (dígitos binarios).

La información se puede tratar como una cantidad física mensurable, es aplicada por los ingenieros de comunicación y algunos de sus conceptos han encontrado su uso en la psicología y en la lingüística.

2.3 DINÁMICA DE SISTEMAS

Durante los últimos treinta años se ha desarrollado un campo conocido como Dinámica de Sistemas, que combina la teoría, los métodos y la filosofía para analizar el comportamiento de los sistemas cuyo precursor fue Jay Forrester (Estados Unidos, 1918-96 años) Ingeniero Eléctrico del Instituto tecnológico de Massachusetts (MIT). Su aplicación se extiende al medio ambiente, la conducta económica, medicina, ingeniería y otros campos. La dinámica de sistemas muestra cómo van cambiando las cosas a través del tiempo. Un proyecto comienza con un problema que hay que resolver en un comportamiento indeseable que hay que corregir y evitar.

La dinámica de sistemas usa conceptos del campo de control realimentado para organizar la información en un modelo de simulación por computador. La simulación revela implicaciones del comportamiento del sistema representado por el modelo diseñado.

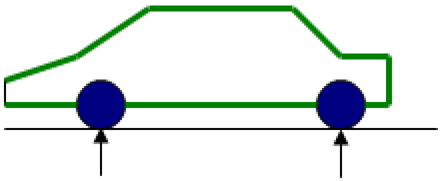
En un sistema dinámico las variables asociadas sufren cambios a lo largo del tiempo, como consecuencia de las interacciones que se producen entre ellas. Su comportamiento vendrá dado por el conjunto de comportamiento de todas las variables que operan en el sistema.

La dinámica de sistemas se aplica para resolver y analizar el comportamiento de los sistemas como el Sistema Mecánico, el Sistema eléctrico, Sistema Hidráulico, Sistema Térmico, Sistema Ambiental y otros.

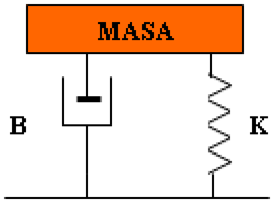
3. MODELAMIENO DE SISTEMAS

3.1 SISTEMA MECÁNICO

Es el sistema de amortiguación de un automóvil, donde:



SISTEMA DE AMORTIGUACIÓN



MODELO DEL SISTEMA

B es el coeficiente de amortiguación que depende de la velocidad (*v*)

K es la constante del resorte que depende de la elongación (x)

x_0 = Posición inicial

x_i = Posición final

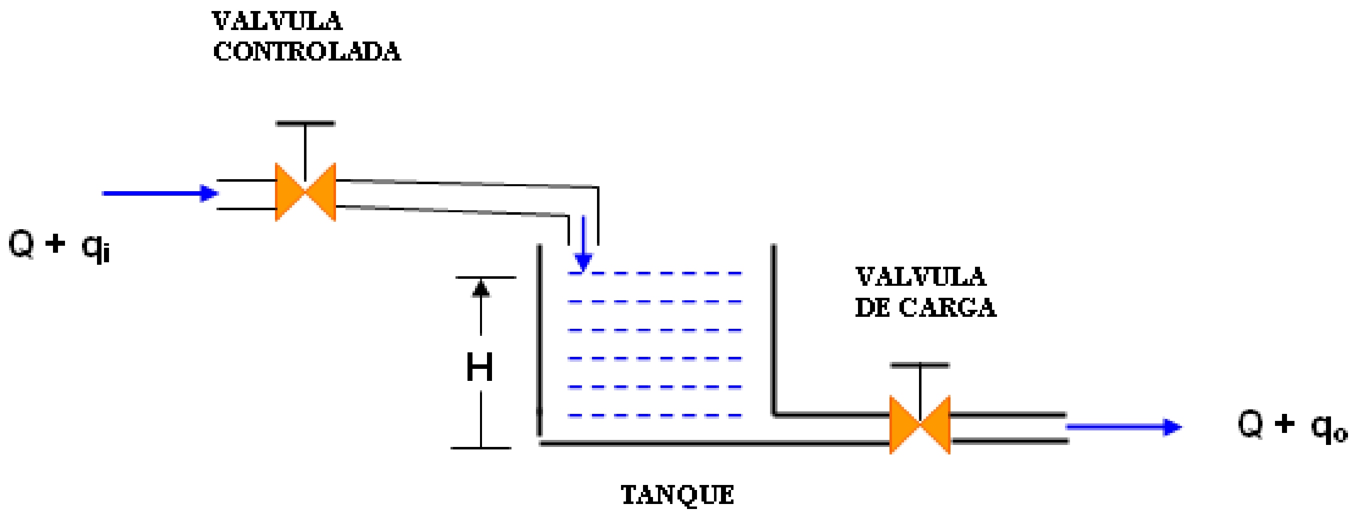
Leyes de Modelo:

$$F_K = Kx, \qquad F_B = B\frac{dx}{dt}, \qquad F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Ecuación dinámica:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + B\left(\frac{dx_o}{dt} - \frac{dx_i}{dt}\right) + K(x_0 - x_i) = 0$$

3.2 SISTEMA HIDRÁULICO



Variables del sistema:

Q = Caudal estable

q_i = Variación del caudal de entrada

q_o = Variación del caudal de salida

H = Altura estable

h = Variación de la altura

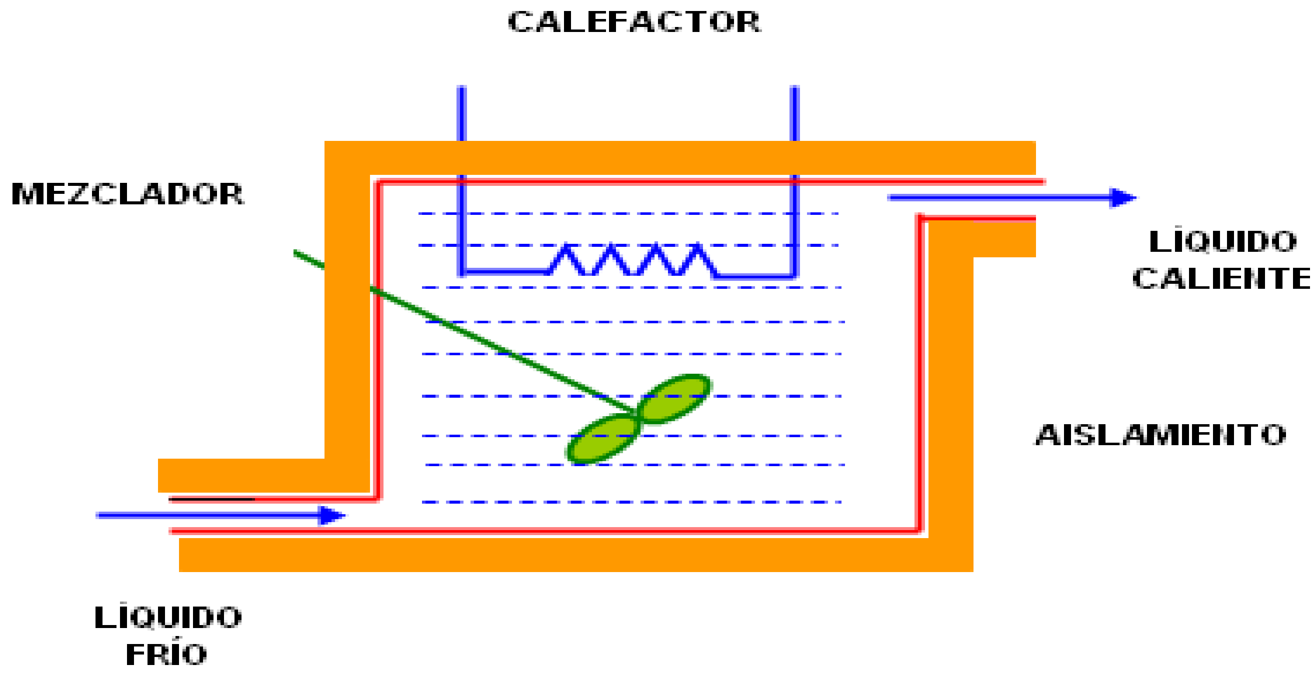
C = Capacitancia del tanque

R = Resistencia hidráulica

Ecuaciones dinámicas (Ecuación diferencial):

$$(1)\quad C\frac{dh}{dt} = q_i - q_o, \qquad (2)\quad RC\frac{dh}{dt} + h = Rq_i, \qquad q_o = \frac{h}{R}$$

3.3 SISTEMA TÉRMICO



Variables del sistema:

H = Entrada de calor en estado estable

h = Cambio de calor

θ = Temperatura

Ecuación dinámica (Ecuación diferencial):

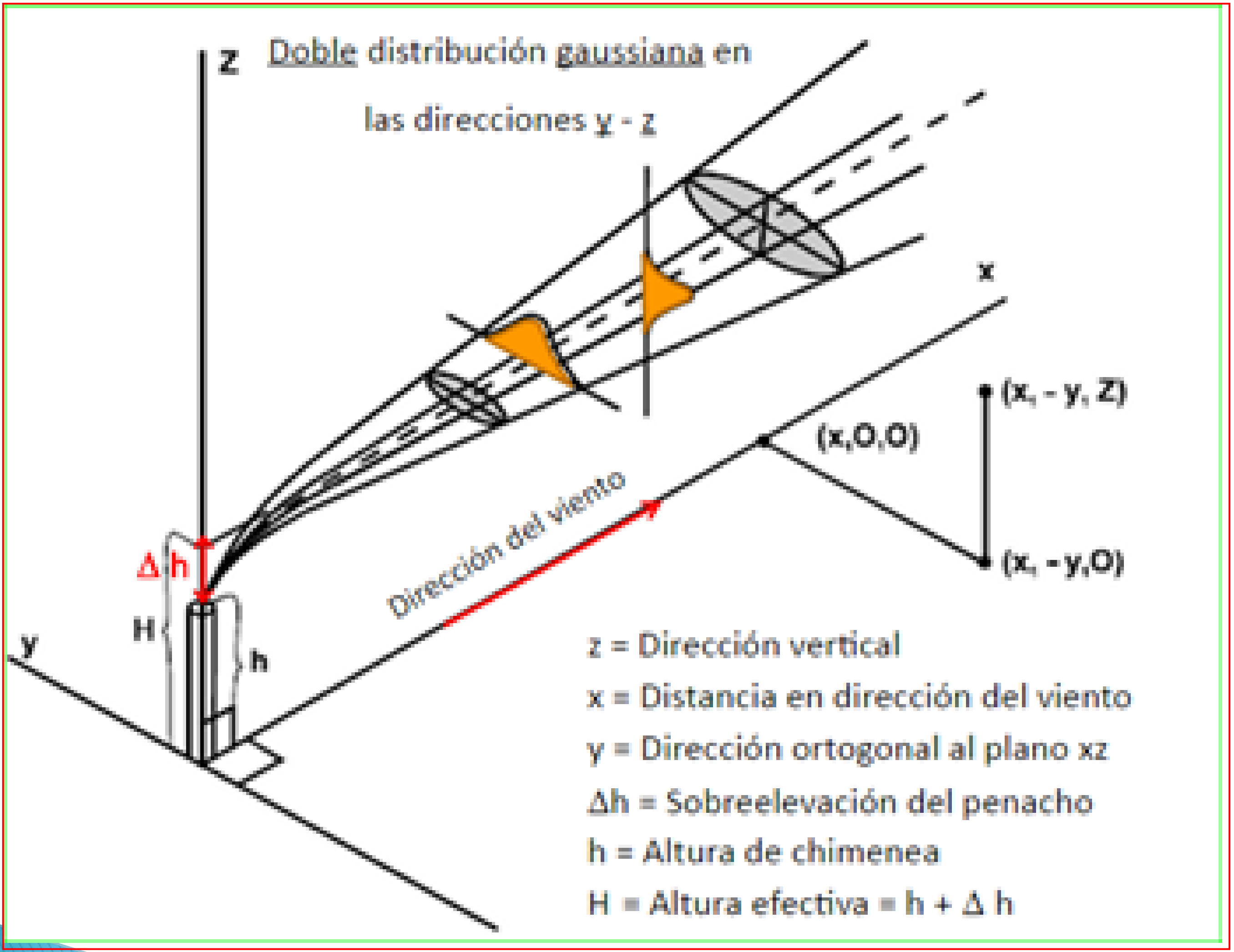
$$(1)\quad C\frac{d\theta}{dt} = h_i - h_o, \qquad (2)\quad RC\frac{d\theta}{dt} + \theta = Rh_i, \qquad h_o = \frac{\theta}{R}$$

3.4 SISTEMA AMBIENTAL

En contaminación atmosférica, el modelo de dispersión gaussiano es de gran aplicación para el cálculo de los niveles inmisión de PM_{10} (material particulado inferior a 10 micrones). Matlab es una herramienta matemática para simular sus concentraciones en las diferentes clases de estabilidad de Pasquill (A, B, C, D, E, F) y distintas velocidades del viento.

El modelo de dispersión gaussiano calcula los niveles de inmisión en un punto del espacio (x,y,z) donde el origen del sistema de coordenadas se fija en la base de la chimenea. La ecuación general es la siguiente:

DISPERSIÓN GAUSSIANA EN UNA CHIMENEA



ECUACIÓN DINÁMICA

$$C(x,y,z) = \frac{Q}{2\pi u \sigma_y \sigma_z} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sigma_y}\right)^2\right]\left\{\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-h}{\sigma_z}\right)^2\right] + \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z+h}{\sigma_z}\right)^2\right]\right\}$$

x, y, z : coordenadas espaciales en metros (m)

$C(x,y,z)$ = concentración de contaminante en un punto (x,y,z) (g. m^{-3})

Q: caudal de emisión (g.s^{-1})

σ_y, σ_z : desviaciones estándar en las direcciones "y" y "z" respectivamente (m)

u: velocidad media de viento (m.s^{-1}) en el sentido del eje x

4. TRANSFORMADA DE LAPLACE

En este capítulo se estudiará la Transformada de Laplace inventada por el físico matemático francés Pierre Simon Laplace (1749-1827) aplicándola a resolver una ecuación diferencial que explica el comportamiento, la dinámica de un sistema, para su análisis correspondiente.

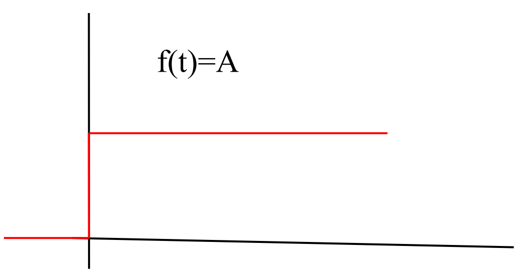
Una de las grandes aplicaciones de la Transformada de Laplace, es su utilización como método matemático para resolver ecuaciones diferenciales convirtiéndolas en ecuaciones algebraicas. Nos permitirá aplicarlas para predecir el comportamiento de un sistema sin necesidad de resolver las ecuaciones diferenciales del sistema como se hace tradicionalmente.

4.1 DEFINICIÓN Y FUNCIONES ESPECIALES

Sea f(t) un función en el tiempo, la Transformada de Laplace de f(t) es:

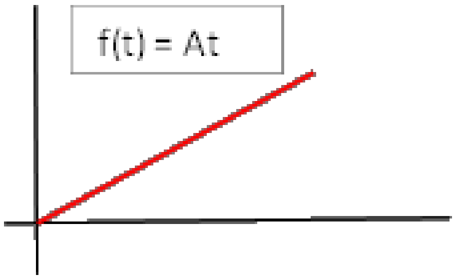
$$\mathcal{L}\,[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt$$

FUNCIÓN ESCALÓN



$$\mathcal{L}\,[f(t)] = \frac{A}{s} = F(s)$$

FUNCIÓN RAMPA



$$\mathcal{L}\,[f(t)] = \frac{A}{s^2} = F(s)$$

FUNCIÓN EXPONENCIAL

f(t) = Ae^{-at}, para t > 0 y f(t) = 0, para t < 0

$$\mathcal{L}\,[f(t)] = \frac{A}{s+a} = F(s)$$

FUNCIÓN SENOIDAL

f(t) = Asen(wt), para t > 0 y f(t) = 0, para t < 0

$$\mathcal{L}\,[f(t)] = \frac{Aw}{s^2 + w^2} = F(s)$$

<u>En general: A una función en el tiempo *f(t),* se le aplica la Transformada de Laplace y se convierte en una función en s llamada F(s)</u>

4.2 TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

Dada la Transformada de Laplace F(s), la Transformada Inversa de Laplace es f(t). La forma más general de encontrar la transformada inversa es en forma directa o simplificarla en fracciones parciales.

EJEMPLO

Hallar la Transformada de Laplace de:

$$f(t) = 3 + 2t + e^{-4t} \qquad \mathcal{L}\,[f(t)] = F(s) = \frac{2}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s+4}$$

Encontrar la Trasformada inversa de Laplace de:

$$G(s) = \frac{s+1}{s^3 + 4s^2 + 3s} \qquad \mathcal{L}^{-1}\,[G(s)] = g(t) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-3t}$$

4.2 ECUACIONES DIFERENCIALES CON LAPLACE

DERIVACIÓN CON LAPLACE

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

INTEGRACIÓN CON LAPLACE

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s}$$

Ahora aplicaremos la Transformada Directa e Inversa de Laplace para solucionar ecuaciones diferenciales, que es la forma más práctica de interpretar el comportamiento de un sistema dinámico.

Ejemplo:

Encontrar la solución a la ecuación diferencial en t = 5, si las condiciones iniciales son iguales a cero.

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 5$$

Aplicar Transformada de Laplace:

$$s^2Y(s)+3[sY(s)]+2Y(s)=\frac{5}{s}$$

Encontrar Y(s), factorizando:

$$Y(s)[s^2+3s+2]=\frac{5}{s} \qquad Y(s)=\frac{5}{s(s^2+3s+2)}$$

Aplicar Transformada Inversa:

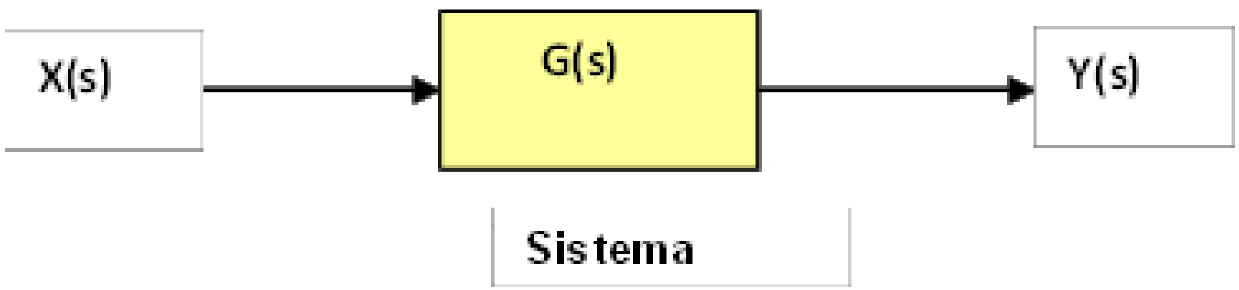
$$y(t)=\frac{5}{2}+\frac{5e^{-2t}}{2}-5e^{-t}$$

Esto quiere decir que para t = 5, el valor de y(t) es:

$$y(t)=\frac{5}{2}+\frac{5e^{-2(5)}}{2}-5e^{-5}=2.5+2.5e^{-10}-5e^{-5}=2.46$$

5. FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

La función de transferencia de un sistema descrito mediante una ecuación diferencial, se define como el cociente de la Transformada de Laplace de la salida y la Transformada de Laplace de la entrada.

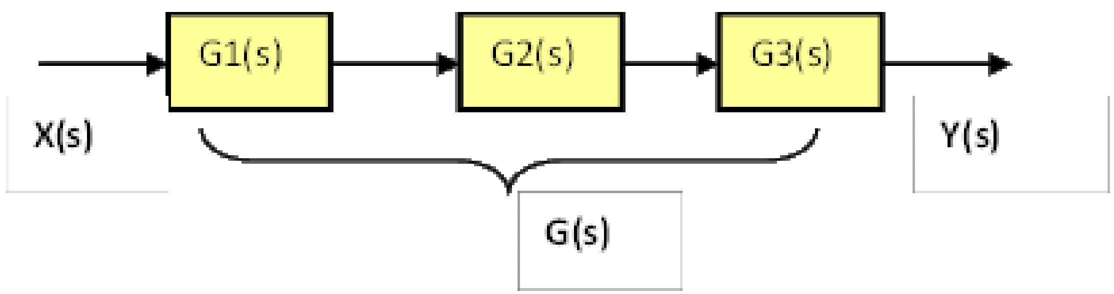


$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \ldots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \ldots a_n s^n}$$

5.1 TIPOS DE ESTRUCTURAS

Los diagramas de bloques mediante los cuales se estructura un sistema son complejos y son generalmente combinaciones de los siguientes tipos de estructuras:

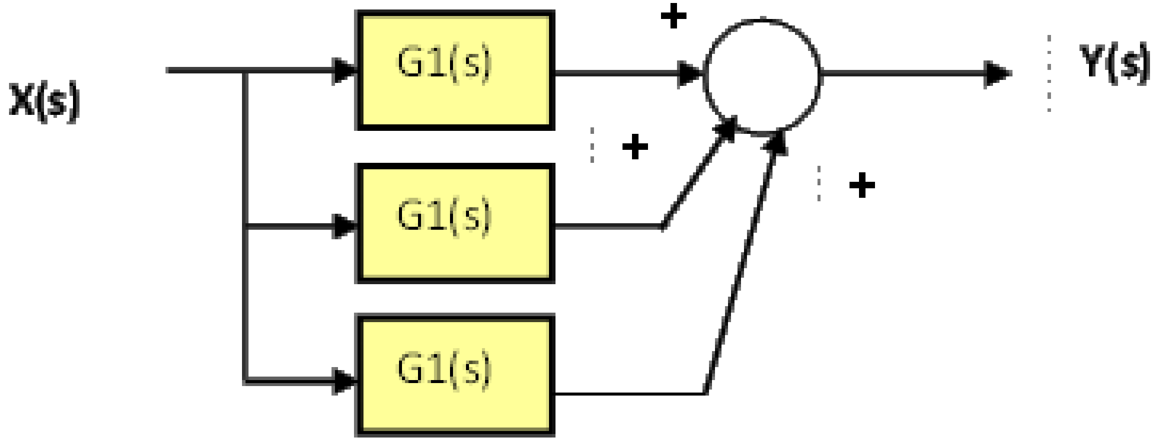
A. ESTRUCTURA SERIE



$$G(s) = G1(s)*G2(s)*G3(s)$$

"En una estructura serie las funciones de transferência se multiplican"

B. ESTRUCTURA PARALELA

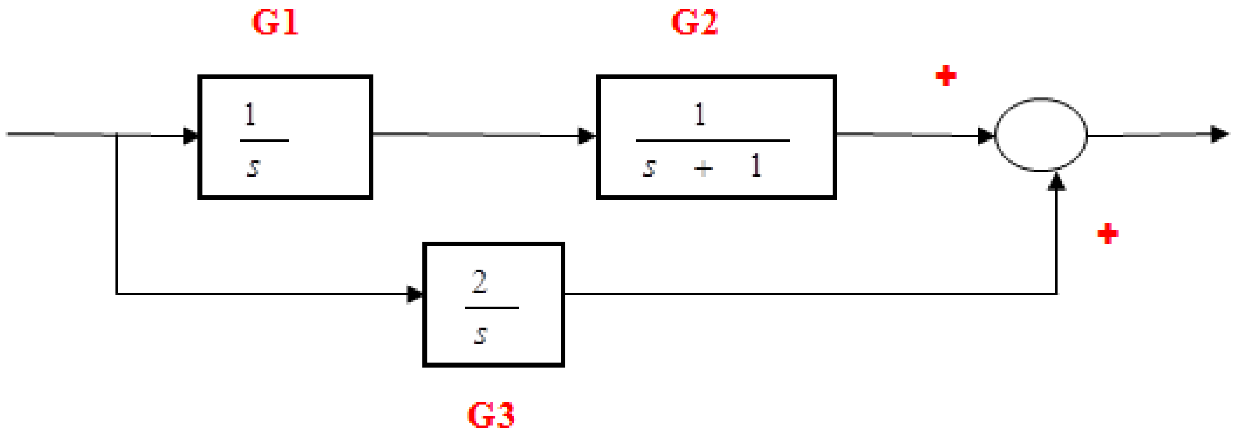


$$\boxed{G(s) = G1(s)+G2(s)+G3(s)}$$

"En una estructura paralela las funciones de transferencia se suman algebraicamente"

EJEMPLO:

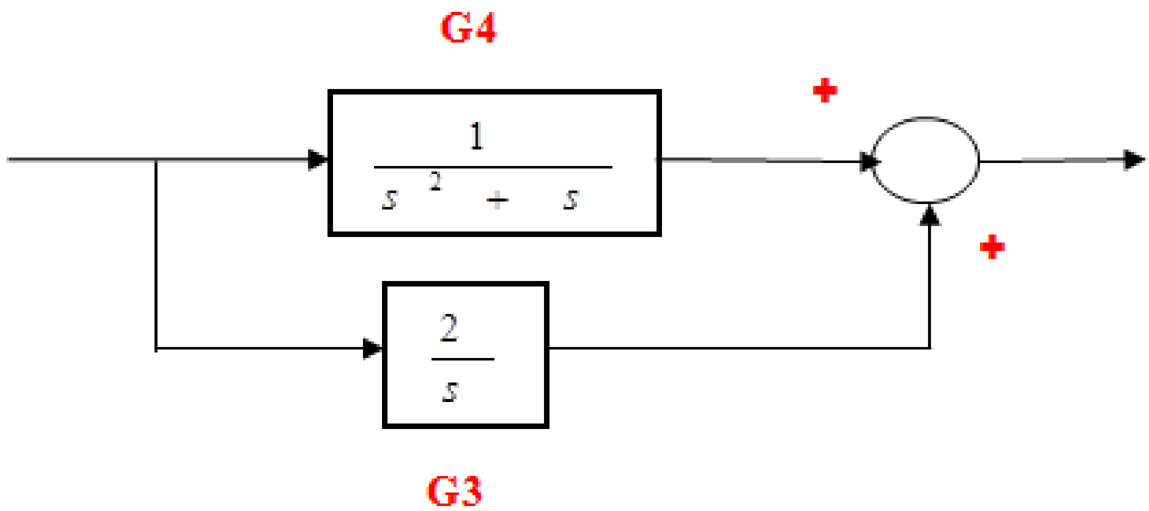
Encontrar la función de transferencia del siguiente diagrama en bloques:



a) G1 y G2 están en serie = G4

$$G4 = G1 * G2 = \left(\frac{1}{s}\right)\left(\frac{1}{s+1}\right) = \frac{1}{s^2 + s}$$

El sistema queda simplificado al siguiente esquema:

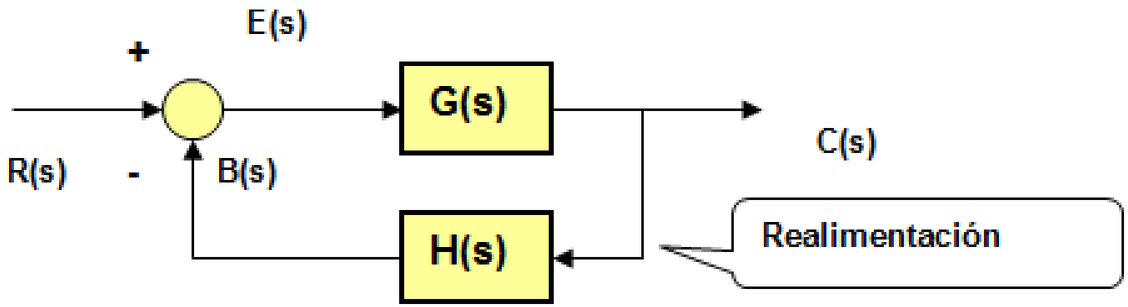


b) Los bloques G4 y G3 están ahora en paralelo = G(s)

$$G(s) = G4 + G3 = \left(\frac{1}{s^2+s}\right) + \left(\frac{2}{s}\right) = \frac{s+2s^2+2s}{s^3+s^2},$$ factorizando y simplificando,

$$G(s) = \frac{2s^2 + 3s}{s^3 + s^2} = \frac{s(2s+3)}{s(s^2+s)}$$ entonces: $$\boxed{G(s) = \frac{2s+3}{s^2+s}}$$

C. ESTRUCTURA REALIMENTADA



a) Función de transferencia en lazo abierto: Gla

$$\boxed{Gla = \frac{B(s)}{E(s)} = G(s) * H(s)}$$

b) Función de transferencia en lazo cerrado: Glc

$$\boxed{Glc = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)},}$$