CURSO: PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES

PROFESOR: ING. JORGE ANTONIO POLANÍA P.

2. LA TRANSFORMADA Z

La Transformada Z se aplica a señales discretas en el dominio del tiempo, con un tiempo de muestreo igual a T.

2.1 DEFINICIÓN DE LA TRANSFORMADA Z

Sea *x(k)* : Señal en tiempo discreto

La transformada Z se define de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\mathcal{Z}[x(k)] = X(z) = \sum_{0}^{\infty} x(k) z^{-k}}$$

$$= x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \cdots + x(k)z^{-k} + \cdots$$

2.2 TZ DE FUNCIONES ELEMENTALES

a) TZ DEL ESCALÓN UNITARIO

La función del escalón unitario es la siguiente:

x(k) = 1, para k ≥ 0 , y x(k) = 0, para k < 0

$$\mathcal{Z}[x(k)] = X(z) = \sum_{0}^{\infty} x(k) z^{-k} = \sum_{0}^{\infty} 1.z^{-k} =$$

$$X(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \cdots = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1 - z^{-1}}} \ , \quad \boldsymbol{Si \ \sum_{k=0}^{\infty} a^{-k} = \frac{a}{a-1} = \frac{1}{1-a^{-1}}}$$

$$\boldsymbol{X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}}$$

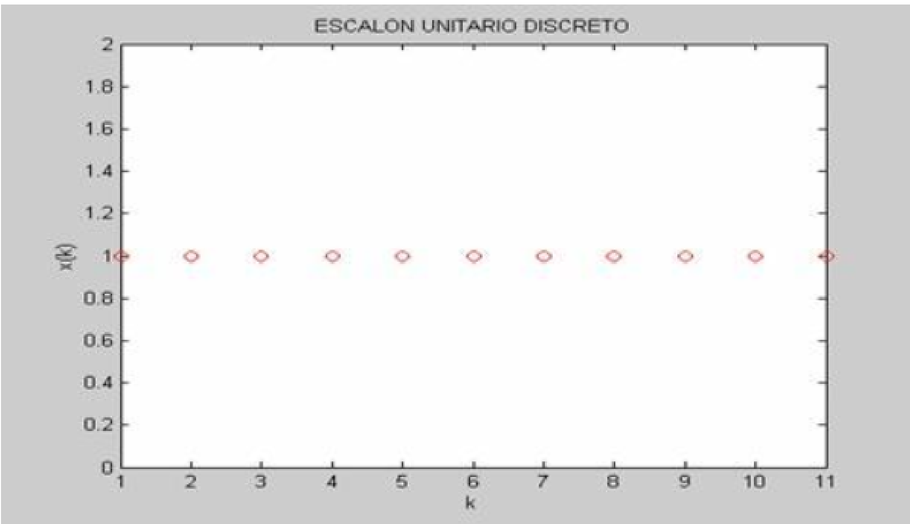
La anterior relación se obtiene por **Matlab** de la siguiente forma:

```
>> syms z  k                    % variables simbólicas z, k
>> symsum(z^(-k),k,0,inf)
```

Para **graficar** la señal escalón unitaria discreta por Matlab, se hace:

```
% GENERACIÓN DE ESCALÓN UNITARIO DISCRETO

x = ones (1,11);   % define once valores de 1's
v = [ 0 10 0 2];    % define valores de ejes
axis (v);
plot (x,'ro')       % grafica círculos de color rojo
xlabel ('k')        % asigna rotulo al eje x
ylabel ('x(k)')    % asigna rotulo al eje y
title (‘ESCALON UNITARIO DISCRETO’)
```



b) TZ de RAMPA UNITARIA

La función de la rampa unitaria es:

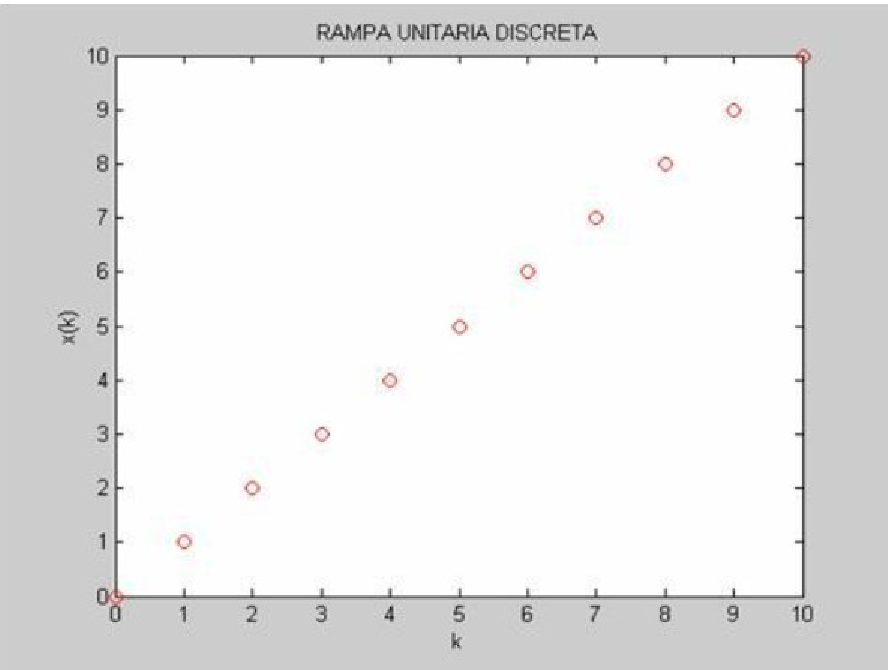
$$x(k) = \begin{cases} k, & para\ \ k = 0,1,2,3, \dots \\ 0, & para\ k < 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{Z}[x(k)] = X(z) = \sum_{0}^{\infty} x(k) z^{-k} = \sum_{0}^{\infty} k.z^{-k} = T \sum_{0}^{\infty} k.z^{-k} =$$

$$X(z) = z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \cdots = \frac{\boldsymbol{z^{-1}}}{\boldsymbol{(1 - z^{-1})^2}}$$

$$\boldsymbol{X(z) = \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}}$$

```
% GENERACIÓN DE LA RAMPA UNITARIA DISCRETA
k = 0:10;                % define valores de k
x = k;                   % función rampa para x
axis([0 10 0 10]);       % define ejes
grid                     % rejilla para grafica
plot(k, x,'ro')          % grafica x en función de k
xlabel('k');             % rotulo para eje x
ylabel('x(k)');          % rotulo para eje y
title('RAMPA UNITARIA DISCRETA')
```



c) TZ de POTENCIAL: *a^k* *(a = constante)*

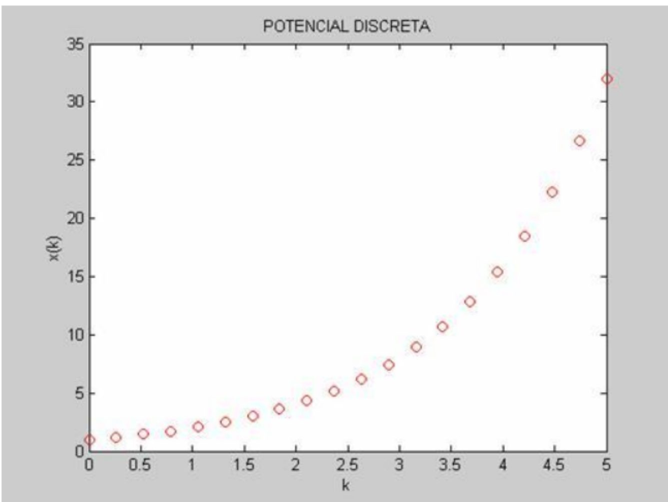
$$x(k) = \begin{cases} a^k, & para\ \ k = 0,1,2,3,\ldots \\ 0, & para\ k < 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{Z}[x(k)] = X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k . z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (a^{-1}z)^{-k}$$

$$= 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + a^3z^{-3} + \cdots = \frac{a^{-1}z}{a^{-1}z - 1} = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

$$\boldsymbol{X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}}$$

```
%GENERACION DE LA FUNCION POTENCIAL  x(k) = 2 ^k
k=linspace(0,5,20);    % define valores de k
x=2.^ k;               % función potencial
grid                   % rejilla para grafica
plot(k, x,'ro')        % grafica x en función de k
xlabel('k');           % rotulo para eje x
ylabel('x(k)');        % rotulo para eje y
title('POTENCIAL DISCRETA')
```



d) TZ de EXPONENCIAL*:*

La función exponencial es de la forma:

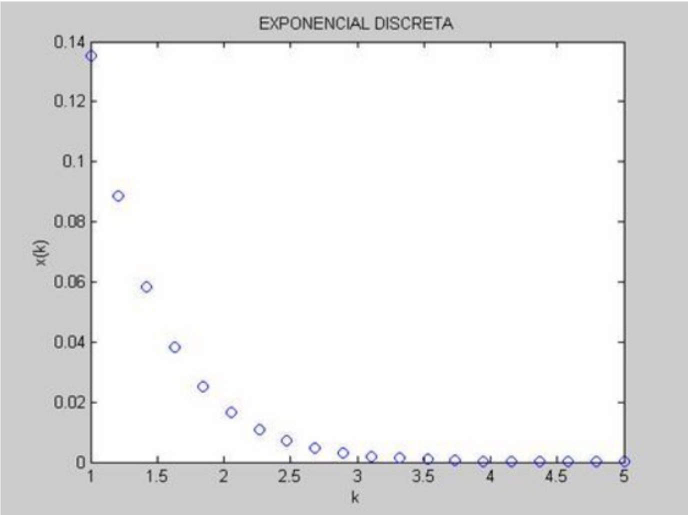
$$x(k) = \begin{cases} e^{-ak}, & para \;\; k = 0,1,2,3, \dots \\ 0, & para \; k < 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{Z}[x(k)] = X(z) = \sum_{0}^{\infty} x(k) z^{-k} = \sum_{0}^{\infty} e^{-ak}.z^{-k} =$$

$$= 1 + e^{-a} z^{-1} + a^{-2a} z^{-2} + a^{-3a} z^{-3} + \cdots = \frac{1}{1 - e^{-a} z^{-1}}$$

$$\boldsymbol{X(z) = \frac{1}{1 - e^{-a} z^{-1}}}$$

```
%GENERACION DE LA FUNCION EXPONENCIAL  x(k) = e -2k
k = linspace (1,5,20);    % define valores de k con espaciamiento lineal
x = exp(-2* k);                    % función exponencial
grid                          % rejilla para grafica
plot(k, x,'bo')           % grafica x en función de k
xlabel('k');                 % rotulo para eje x
ylabel('x(k)');            % rotulo para eje y
title('EXPONENCIAL DISCRETA')
```



e) SENOIDAL : sen(wk)

La función es de la forma:

$$x(k) = \begin{cases} sen(wk), & para\ \ k = 0,1,2,3,\ldots \\ 0, & para\ k < 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{Z}[x(k)] = X(z) = \sum_{0}^{\infty} x(k)z^{-k} = \sum_{0}^{\infty} sen(k).z^{-k}$$

Por las ecuaciones de Euler:

$$sen(wk) = \frac{e^{jwk} - e^{-jwk}}{2j}$$

$$cos(wk) = \frac{e^{jwk} + e^{-jwk}}{2}$$

$$\mathcal{Z}[sen(wk)] = \mathcal{Z}\left[\frac{e^{jwk} - e^{-jwk}}{2j}\right]$$

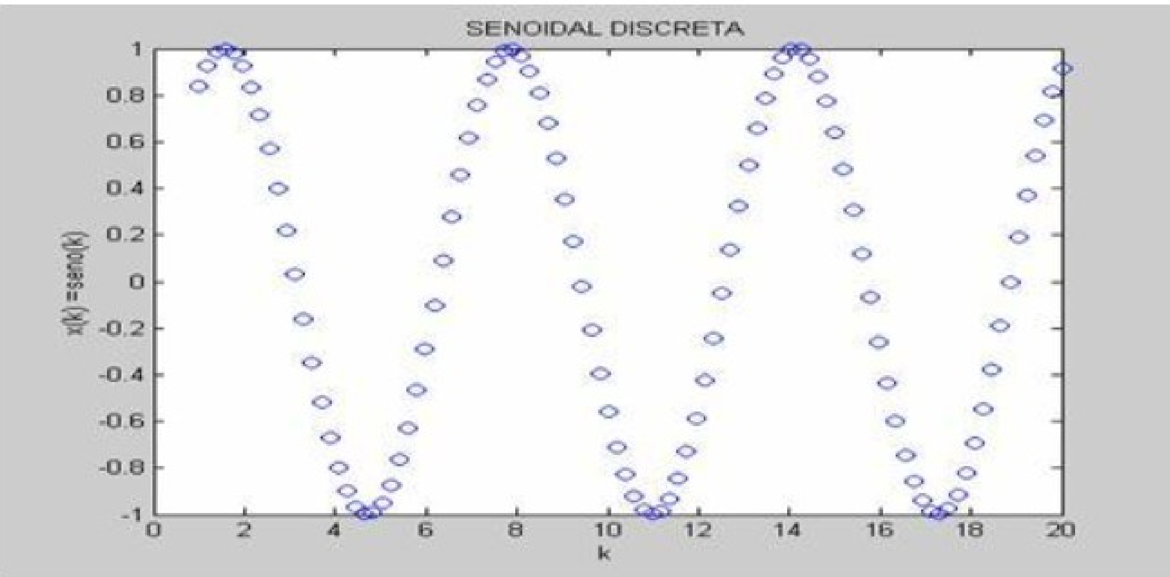
Aplicando la Transf_$\mathcal{Z}$ de la exponencial,

$$X(z) = \frac{1}{2j}.\frac{1}{1 - e^{jw}z^{-1}} - \frac{1}{2j}.\frac{1}{1 - e^{-jw}z^{-1}}$$

Reemplazando las exponenciales por las ecuaciones de Euler:

$$\boldsymbol{X(z) = \frac{z^{-1} sen(w)}{1 - 2z^{-1}\cos(w) + z^{-2}}}$$

```
%GENERACION DE LA FUNCION SENO:   x(k) = sen(wkT)
k = linspace(1,20);              % define valores de k con espaciamiento
lineal
x = sin(k);                      % función exponencial
grid                             % rejilla para grafica
plot(k, x,'bo')                  % grafica x en función de k
xlabel('k');                     % rotulo para eje x
ylabel('x(k) =seno(k)');         % rotulo para eje  y
title('SENOIDAL DISCRETA')
```



2.3 PROPIEDADES Y TEOREMAS.

a) MULTIPLICACIÓN POR UNA CONSTANTE

Z[a x(k)] = a Z[x(k)] = a X(z)

b) LINEALIDAD

Si x(k) = a f(k) + b g(k), entonces,

X(z) = a F(z) + b G(z)

c) MULTIPLICACIÓN POR a^k

Si $y(k) = a^k x(k)$*, entonces,*

$$\mathcal{Z}[y(k)] = \sum_{0}^{\infty} a^k x(k) z^{-k} = \sum_{0}^{\infty} x(k)(a^{-1})^{-k} = X(a^{-1}z)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{Z}[a^k x(k)] = X(a^{-1}z)}$$

d) TEOREMA DEL TRASLACIÓN

Si y(k) = e $^{-ak}$ x(k), entonces,

$$\mathcal{Z}[y(k)] = \sum_{0}^{\infty} e^{-ak}x(k)z^{-k} = \sum_{0}^{\infty} x(k)(e^{a}z)^{-k} = X(e^{a}z)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{Z}\left[e^{-ak}x(k)\right] = X(e^{a}z)}$$

e) TEOREMA DEL CORRIMIENTO

Corrimiento hacia atrás:

$$\mathcal{Z}[x(k-n)] = z^{-n}\mathcal{Z}[x(k)] = z^{-n}X(z)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{Z}[x(k-n)] = z^{-n}X(z)}$$

Corrimiento hacia adelante:

$$\mathcal{Z}[x(k+n)] = z^{n}\left[X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k}\right]$$

$$= z^{n}X(z) - z^{n}x(0) - z^{n-1}x(1) - z^{n-2}x(2) - \cdots - zx(n-1)$$

EJEMPLO:

$$\mathcal{Z}[x(k+3)] = z^{3}X(z) - z^{3}x(0) - z^{2}x(1) - zx(2)$$

f) SUMA DE FUNCIONES

Sea

$$y(k) = \sum_{h=0}^{k} x(h)\,, para\ k = 0,1,2, \ldots$$

y(k) = x(0) + x(1) + x(2) + ········ + x(k-1) + x(k) *y(k-1) = x(0) + x(1) + x(2) + ········ + x(k-1), restando estas dos expresiones,*

y(k) - y(k-1) = x(k), sacando Transf._Z,

$Y(z) - z^{-1}Y(z) = X(z)$, entonces despejando Y(z) se tiene que:

$$\boldsymbol{Y(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} X(z)}$$

g) TEOREMA DEL VALOR INICIAL

Si el límite *lim X(z)* existe, entonces el valor inicial de *x(k) = x(0)* es igual a:

$$\boldsymbol{x(0) = \lim_{z \to \infty} X(z)}$$

h) TEOREMA DEL VALOR FINAL

El valor final de *x(k)*, o sea, cuando $k \to \infty$ (Si *X(z)* es estable) , es:

$$\boldsymbol{x(\infty) = \lim_{k \to \infty} x(k) = \lim_{z \to 1} [(1 - z^{-1}) X(z)]}$$

EJEMPLO

Encontrar la Transformada Z de una función escalón de amplitud 4 y desfase en atraso de 3 periodos de muestreo.

Solución:

*x(k) = 4*u(k- 3),*

x(k) = 4u(k-3)

$[4u(k-3)] = 4[u(k-3)] = 4\, z^{-3} \mathcal{Z}[u(k)]$

Aplicando teorema de corrimiento en atraso:

$X(z) = 4\, z^{-3}\, (1/\,(1-z^{-1})) = 4\,/\,(z^{3} - z^{2})$

EJEMPLO

Obtener la transformada Z de $y(k) = 5^{k-2}$ *para* $k = 1, 2, 3, ...$ e igual a cero para $k \leq 0$.

Solución:

Si $x(k) = 5^k$, *entonces* $y(k) = x(k-2) = 5^{k-2}$

$\mathcal{Z}[y(k)] = \mathcal{Z}[5^{k-2}] = \mathcal{Z}[x(k-2)] = z^{-2}\,\mathcal{Z}[x(k)] = z^{-2}\,\mathcal{Z}[5^k] =$

$$= z^{-2}\left[\frac{1}{1-5z^{-1}}\right] = \frac{z^{-2}}{1-5z^{-1}} = \frac{1}{z^2-5z}$$

EJEMPLO

Obtener la transformada Z de $y(k) = k\,e^{-5k}$ *para* $k = 1, 2, 3, ...$ e igual a cero para $k \leq 0$.

Solución:

Si $x(k) = k$, *entonces,* $X(z) = z^{-1}/(1-z^{-1})^2$ *, por tanto,*

$y(k) = e^{-5k}\,x(k)$,

Aplicando teorema de traslación,

$\mathcal{Z}[y(k)] = \mathcal{Z}\,[k\,e^{-5k}] = X(e^{5k} z)]$ *, reemplazando z por* $e^{5k} z$, *en X(z) se tiene:*

$Y(z) = (e^{5k} z)^{-1} / (1-(e^{5k} z)^{-1})^2 = e^{-5k} z^{-1} / (1 - e^{-5k} z^{-1})^2$

EJEMPLO

Determinar el valor inicial x(0) de una señal si su transformada Z es igual a :

$$X(z) = \frac{(1-e^{-5k})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-5k}z^{-1})}$$

Aplicando el Teorema de valor inicial,

$$x(0) = \lim_{z \to \infty} X(z) = \frac{(1 - e^{-5k})\infty^{-1}}{(1 - \infty^{-1})(1 - e^{-5k}.\infty^{-1})} = 0$$

EJEMPLO

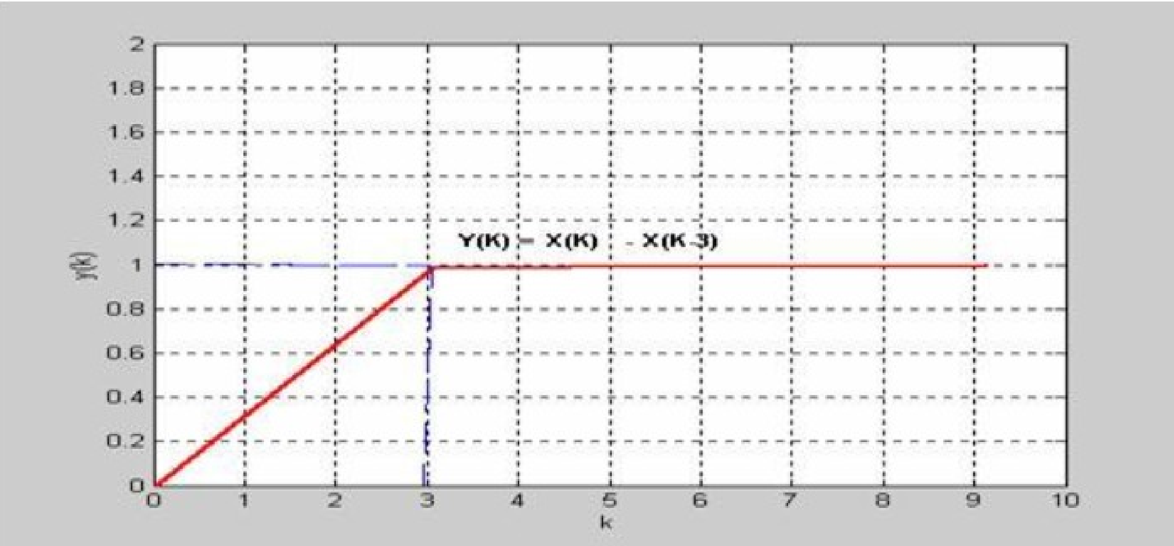
Determinar el valor final x(∞) de una señal si su transformada Z es igual a:

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-5}z^{-1}}$$

$$x(\infty) = \lim_{z \to 1}(1 - z^{-1})X(z) = \lim_{z \to 1}\left[1 - \frac{1 - z^{-1}}{1 - e^{-5}z^{-1}}\right] = 1$$

EJEMPLO

Obtener la transformada Z de la figura dada. Tiempo de muestreo: T = 1.0



Si x(k) = (1/3)k (rampa de pendiente 1/3)

y(k) = x(k) – x(k- 3), entonces,

Y(z) = 𝒵[y(k)] = 𝒵[(1/3)k] –z $^{-3}$ *𝒵[(1/3)k]*

$$Y(z) = \frac{1}{3}.\frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} - \frac{1}{3}.\frac{z^{-3}z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = \frac{1}{3}.\frac{z^{-1}(1 - z^{-3})}{(1 - z^{-1})^2}$$

EJEMPLO

a). $X(k) = 4u(k-3)$

$u(k) = Escalon\ unitario$

$$Z[u(k)] = \frac{1}{1-Z^{-1}}$$

$$Z[X(k)] = \frac{4z^{-3}}{1-z^{-1}} = \frac{4}{z^3-z^2}$$

b). $y(k) = 5^{k-2}\,; X(k) = 5^k \rightarrow y(k) = X(k-2)$

$$Z[a^k] = \frac{1}{1-az^{-1}} \rightarrow Z[5^k] = \frac{1}{1-5z^{-1}}$$

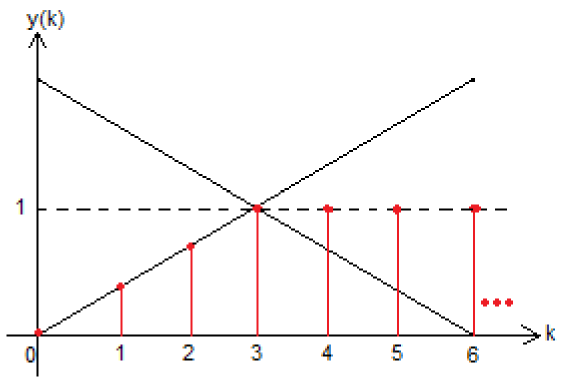
$$Z[y(k)] = \frac{z^{-2}}{1-5z^{-1}}$$

c). Determinar el valor inicial de:

$$X(z) = \frac{(1-e^{-5})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-5}z^{-1})};\ \ X(k)_{k=0} = X(0)$$

$$X(0) = \lim_{z\to\infty} X(z) = 0$$

d). Hallar $X(z)$ de:



$$y(k) = \frac{1}{3}k - \frac{1}{3}(k-3)$$

$$Z[y(k)] = \frac{z^{-1}}{3(1-z^{-1})^2} - \frac{z^{-4}}{3(1-z^{-1})^2}$$

2.4 TRANSFORMADA Z INVERSA

$$Si \quad \mathcal{Z}[x(k)] \to X(z), \quad entonces \qquad X(z) \xrightarrow{z^{-1}} x(k)$$

a) MÉTODO DE DIVISIÓN DIRECTA

$$Z[x(k)] = X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k}$$

$$Z[x(k)] = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \cdots$$

EJEMPLO

$$X(z) = \frac{5z+10}{z^2 - z + 0.16}$$

Solución

$$X(z) = \frac{5z^{-1} + 10z^{-2}}{1 - z^{-1} + 0.16z^{-2}}; Dividiendo$$

$$X(z) = 5z^{-1} + 15z^{-2} + 14.2z^{-3} + \cdots$$

$$x(0) = 0;\ x(1) = 5;\ x(2) = 15;\ x(3) = 14.2 \ldots$$

$$x(k) = [0 \quad 5 \quad 15 \quad 14.2 \ldots]$$

b) FRACCIONES PARCIALES

EJEMPLO

$$X(z) = \frac{z+0.8}{(z-0.5)(z+0.2)} = \frac{c_1}{z-0.5} + \frac{c_2}{z+0.2}$$

$$X(z) = \frac{1.85}{z-0.5} - \frac{0.85}{z+0.2}$$

$$X(z) = \frac{1.85z^{-1}}{1 - 0.5z^{-1}} - \frac{0.85z^{-1}}{1 + 0.2z^{-1}}$$

$$X(k) = 1.85(0.5)^{k-1} - 0.85(-0.2)^{k-1}$$

EJEMPLO

$$X(z) = \frac{(z-1)(z+0.8)}{(z-0.5)(z+0.2)}$$

Nota: Cuando $numerador \geq denominador$, lo mejor es dividir por z la ecuación.

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{(z-1)(z+0.8)}{z(z-0.5)(z+0.2)} = \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z-0.5} + \frac{c_3}{z+0.2}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{8}{z} - \frac{1.85}{z-0.5} - \frac{5.14}{z+0.2} \rightarrow X(z) = 8 - \frac{1.85.z}{z-0.5} - \frac{5.14.z}{z+0.2}$$

$$X(z) = 8 - \frac{1.85}{1 - 0.5z^{-1}} - \frac{5.14}{1 + 0.2z^{-1}}$$

$$X(k) = 8\,\delta(k) - 1.85(0.5)^k - 5.14(-0.2)^k$$

2.5 ECUACIONES EN DIFERENCIA

Considérese un sistema discreto LTI (Lineal e invariante en el tiempo) dado por la ecuación en diferencias:

$$\sum_{n=0}^{p} a_n x(k-n) = \sum_{m=0}^{q} b_m u(k-m)$$

$$a_0x(k) + a_1x(k-1) + a_2x(k-2) + \cdots + a_px(k-p) =$$

$$b_0u(k) + b_1u(k-1) + b_2u(k-2) + \cdots + b_qu(k-q)$$

donde u(k) es la entrada al sistema y x(k) es la salida.

La forma de solucionar esta ecuación en diferencia consiste en calcular la transformada Z, luego aplicar las condiciones iniciales dadas y por último obtener la transformada Z inversa. Se debe recordar que:

$$Z[x(k-n)T] = z^{-n}Z[x(k)] = z^{-n}X(z)$$

$Z[x(k+n)T] = z^n[X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT) * z^{-k}]$ =

$z^n X(z) - z^n x(0) - z^{n-1}x(1) - z^{-2}x(2) - \cdots - zx(n-1)$

EJEMPLO

$\underbrace{x(k+2)}_{1} + \underbrace{5x(k+1)}_{2} + \underbrace{6x(k)}_{3} = 0\,; \qquad x(0) = 0\,;\ x(1) = 1$

Sacar transformada Z

$\underbrace{z^2X(z) - z^2x(0) - zx(1)}_{1} + \underbrace{5[zX(z) - zx(0)}_{2} + \underbrace{6X(z)}_{3}$ =0

$z^2X(z) - z + 5zX(z) + 6X(z) = 0$

$x(z)[z^2 + 5z + 6] = z \rightarrow X(z) = \dfrac{z}{z^2 + 5z + 6}$

$X(z) = \dfrac{z}{(z+2)(z+3)} = \dfrac{z}{z+2} - \dfrac{z}{z+3} = \dfrac{1}{1+2z^{-1}} - \dfrac{1}{1+3z^{-1}}$

$x(k) = (-2)^k - (-3)^k$

EJEMPLO

Resolver la ecuación en diferencias:

$x(k+2) + 0.5x(k+1) + 0.2x(k) = u(k+1) + 0.3u(k)$

Condiciones

$x(k) = 0, \qquad para\ k \le 0\,; \qquad u(k) = 0\,, \qquad para\ \ k < 0$

$u(0) = 1.5\,, u(1) = 0.5\,, u(2) = -0.5\,, u(k) = 0\,, k = 3, 4, 5, \ldots$

Sacando transformada Z

$$z^2X(z) - z^2x(0) - zx(1) + 0.5[zX(z) - zx(0)] + 0.2\,X(z) = zu(z) - zu(0) + 0.3u(z)$$

Para $k = -1$: $\ x(1) + 0.5x(0) + 0.2x(-1) = u(0) + 0.3u(-1)$

$x(1) = u(0) = 1.5$

$z^2X(z) - 1.5z + 0.5zX(z) + 0.2X(z) = Zu(z) - 1.5z + 0.3u(z)$

$X(z)[z^2 + 0.5z + 0.2] = u(z)[z + 0.3]$

$$X(z) = \frac{z + 0.3}{z^2 + 0.5z + 0.2} u(z)$$

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u(k) z^{-k} = u(0) + u(1)z^{-1} + u(2)z^{-2} + u(3)z^{-3} + \cdots$$

$$u(z) = 1.5 + 0.5z^{-1} - 0.5z^{-2}$$

$$X(z) = \frac{(z + 0.3)(1.5 + 0.5z^{-1} - 0.5z^{-2})}{z^2 + 0.5z + 0.2}$$

$$X(z) = \frac{(z + 0.3)(1.5z^2 + 0.5z - 0.5)}{z^2(z^2 + 0.5z + 0.2)}$$

MATLAB

```
Num = [1.5   0.95   0.65   0.15]
den = [1   0.5   0.2   0   0]
[r,p,k] = residue(num,den)
```

Resultado:

```
r = 0.0625 + 0.6995i
    0.0625 - 0.6995i
    1.3750
    0.7500
p = -0.2500 + 0.3708i
    -0.2500 - 0.3708i
         0
         0
k = [ ]
```

2.6 FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

De la ecuación en diferencias, y(k) es la salida y x(k) es la entrada,

$$y(k) = -\sum_{n=1}^{p} a_n y(k - n) + \sum_{m=0}^{q} b_m x(k - m)$$

$$Y(z) = -\sum_{n=1}^{p} a_n z^{-n} Y(z) + \sum_{m=0}^{q} b_m z^{-m} X(z)$$

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_q z^{-q}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + b_p z^{-p}} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

Para encontrar la salida:

1. $y(k) = Z^{-1}[H(z)X(z)], \quad si\ X(z) \quad es\ racional\ , o$
2. $y(k) = h(k) * x(k), \ h(k) = Z^{-1}\ [H(z)]$

2.7 RESPUESTA EN FRECUENCIA

La respuesta de un sistema se encuentra mediante la convolución,

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k), \quad si \quad x(n) = e^{jwn} = \cos(wn) + jsen(wn)$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{jw(n-k)} = e^{jwn} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-jwk} = e^{jwn} H(e^{jw})$$

$$y(n) = x(n)H(e^{jwn})$$

$$H(e^{jw}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-jwk}$$

$Esta\ expresión\ matemática, se\ denomina\ respuesta\ en\ el\ dominio\ de\ la\ frecuencia$

$H(e^{jw}) = H_r(e^{jw}) + jH_i(e^{jw})$ = Parte real + parte imaginaria

$H(e^{jw}) = |H(e^{jw})| e^{jarg(H(e^{jw}))} = Magnitud + fase$

EJEMPLO

Hallar la respuesta en frecuencia de un sistema que tiene una respuesta al impulso unitario,

$h(n) = a^n\ u(n)\ para\ |a| > 1$

$$H(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-jwn} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-jwn} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-jw})^n = \frac{1}{1-ae^{-jw}}$$

$$H(e^{jw}) = \frac{1}{1-ae^{-jw}} = \frac{1}{1-a(cosw - jsenw)} = \frac{1}{1-\mathrm{acos}(w) + jasen(w)}$$

$$\left|H(e^{jw})\right| = \frac{1}{\sqrt{(1-acosw)^2 + (asenw)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2-2acosw}}, \ \ magnitud$$

$$argH(e^{jw}) = -tan^{-1}\frac{asenw}{1-acosw}, \ \ argumento$$