TRANSFORMADA DE FOURIER

PROFESOR: JORGE ANTONIO POLANÍA PUENTES

1. REPRESENTACION DE FOURIER PARA SEÑALES CONTINUAS

a. Señales periódicas en el tiempo continuo: Series de Fourier

Una señal continua se puede representar por medio de los coeficientes de Fourier, de esta forma,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k) e^{j\left(\frac{2\pi}{T}\right)kt} \rightarrow \; X(k) = \frac{1}{T}\int x(t) e^{-j\left(\frac{2\pi}{T}\right)kt}\, dt$$

T: Periodo fundamental $\quad \omega_0 = 2\pi/T$

$X(k)$: Son los coeficientes de Fourier

Ejemplo

$$x(t) = 3cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)\; ; \; x(t) = Acos(\omega_0 + \emptyset)$$

$$\omega_0 = \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{T}; \; \rightarrow T = 4 \quad (Periodo)$$

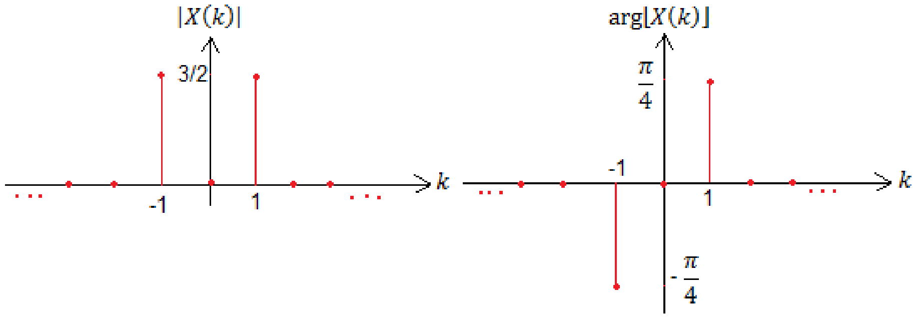
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k) e^{j\,k\frac{\pi}{2}t}; \quad donde, \; X(k) son\ los\ coeficientes\ de\ Fourier$$

Aplicando Euler,

$$x(t) = 3\frac{e^{j\left(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{4}\right)} + e^{-j\left(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{4}\right)}}{2} = \frac{3}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{-j\frac{\pi}{2}t} + \frac{3}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}e^{j\frac{\pi}{2}t}$$

Coeficientes de Fourier:

$$X(-1) = \frac{3}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}; \; X(1) = \frac{3}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$$



b. Respuesta en frecuencia: Transformada de Fourier

$$X(e^{jw}) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\ dt; \qquad Transformada\ de\ Fourier$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}\ d\omega; \ \ Transformada\ de\ Fourier\ inversa$$

La FT convierte la señal en el dominio del tiempo en el dominio de la frecuencia.

Ejemplo: Señal exponencial

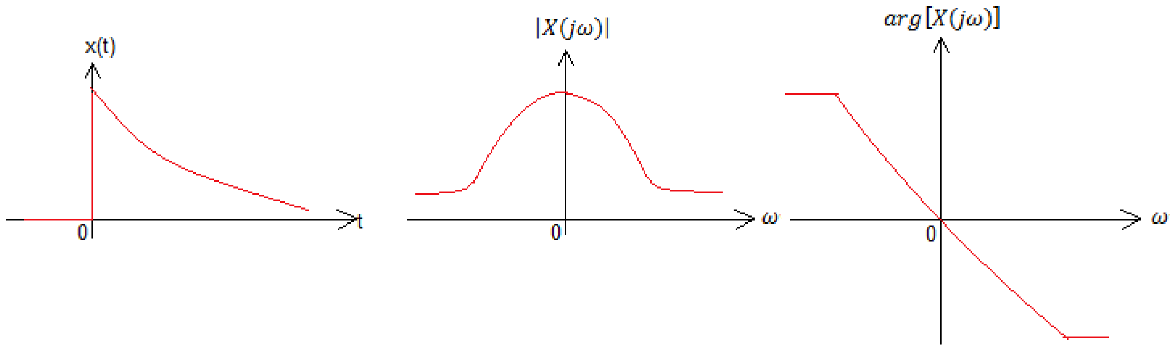
$x(t) = e^{-at}u(t);\ \ a > 0\ \ (converge)$

$$X\left(e^{jw}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-j\omega t}\ dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(a+j\omega)t}\,dt = -\frac{1}{a+j\omega}e^{-(a+j\omega)}\Big|_{0}^{\infty}$$

$X\left(e^{jw}\right) = \frac{1}{a+j\omega}$

Espectros de magnitud y fase:

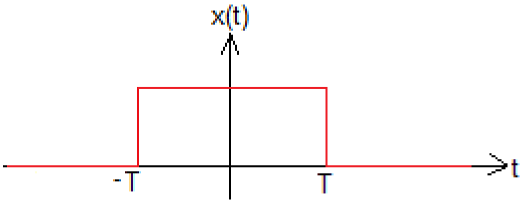
$$\left|X(e^{jw})\right| = \frac{1}{(a^2+\omega^2)^{1/2}}\ ; \qquad arg\left[X(e^{jw})\right] = -arctan\left(\frac{\omega}{a}\right)$$



Ejemplo: Pulso rectangular

$x(t) = Pulso\ rectangular$

$$x(t) = \begin{Bmatrix} 1, & T \leq t \leq T \\ 0, & |t| > T \end{Bmatrix}$$



$$X(e^{jw}) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-T}^{T} e^{-j\omega t}\, dt = -\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-T}^{T}$$

$$X(e^{jw}) = -\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega T} + \frac{1}{j\omega} e^{j\omega T} = \frac{1}{j\omega}\left[e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}\right]$$

$$X(e^{jw}) = \frac{2}{\omega} sen(\omega T) \quad (1)$$

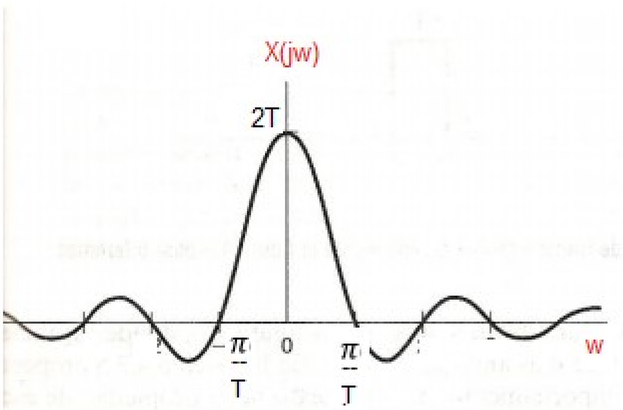
Aplicando la regla de L'Hopital:

$$Si\ f(c) = g(c) = 0 \rightarrow \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{\omega \to 0} \frac{2}{\omega} sen\ (\omega T) = \lim_{\omega \to 0} \frac{2T cos(\omega t)}{1} = 2T$$

$$por\ definición \quad sinc(\theta) = \frac{sen(\pi\theta)}{\pi\theta}, entonces,\ \ wT = \pi\theta,\ \ \theta = \frac{wT}{\pi}$$

$$X(e^{jw}) = 2T\ sinc\left(\frac{\omega T}{\pi}\right)$$



PROPIEDADES DE LAS REPRESENTACIONES DE FOURIER

a) Linealidad

- Periódicas en el tiempo continuo:

$$y(t) = a\,x1(t) + b\,x2(t) \overset{FS}{\leftrightarrow} Y(k) = a\,X1(k) + \ b\,X2(k),$$ donde,

- No periódicas en tiempo continuo

$$y(t) = ax1(t) + bx2(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} Y(j\omega) = aX1(j\omega) + bX2(j\omega)$$

b) Simetría

Para una señal x(t) real, esto es, x(t) = x*(t) (conjugado) la parte real de la representación de Fourier tiene *simetría par* y por la parte imaginaria *simetría impar*.

- Periódicos en el tiempo continúo.

$$Re[X(k)] = \ Re[X(-k)]$$

$$Im[X(k)] = \ -Im[X(-k)]$$

- No periódica en el tiempo continuo

$$Re[X(j\omega)] = -Re[X(-j\omega)]$$

$$Im[X(j\omega)] = Im[X(-j\omega)]$$

c) Corrimiento en el tiempo

$$x(t - t_0) \overset{FS}{\leftrightarrow} e^{-j(\frac{2\pi}{T})kt_0}X(k)$$

$$x(t - t_0) \overset{FT}{\leftrightarrow} e^{-j\omega t_0}X(j\omega)$$

d) Escalonamiento

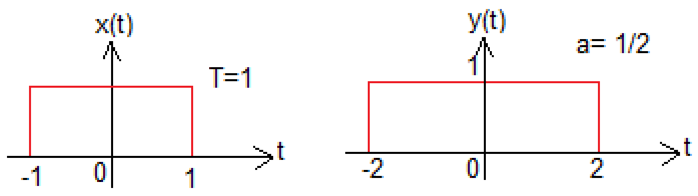
- No periódica continua: FT

$$y(t) = x(at) \rightarrow Y(j\omega) = \frac{1}{|a|}X\left(j\frac{\omega}{a}\right)$$

Ejemplo

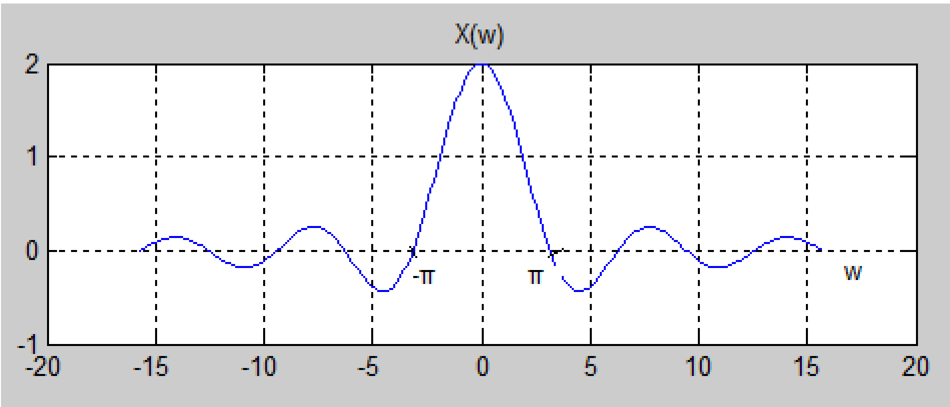
$x(t)$ es el pulso rectangular, hallar: $y(t) = x\left(\frac{1}{2}t\right)$, a $= 1/2$

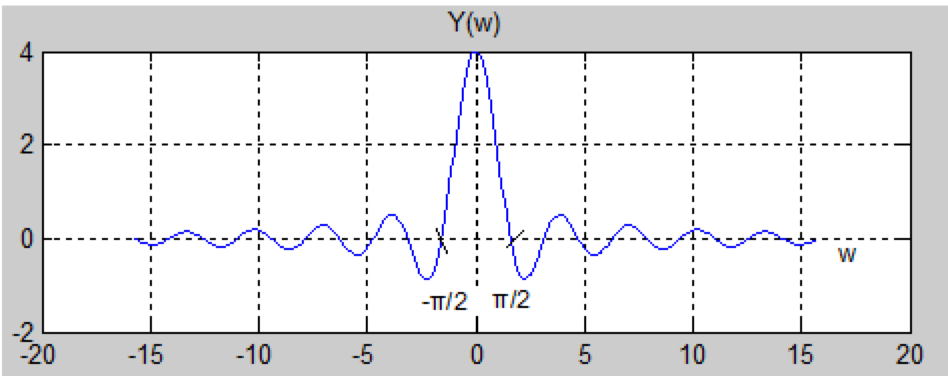
$x(t) = 1, \quad |t| \leq 1 \; ; \quad y(t) = 1, \quad |t| \leq 2$



$$X(j\omega) = \frac{2}{\omega} sen(\omega) \rightarrow Y(j\omega) = \frac{1}{1/2} X\left(j\frac{\omega}{1/2}\right); \quad x(0) = 2$$

$$Y(j\omega) = 2X(j2\omega) = 2 * \frac{2}{2\omega} sen(2\omega) = \frac{2}{\omega} sen(2\omega) \quad y(0) = 4$$





Señal periódica continua: FS

$y(t) = x(at) \rightarrow Y(k) = X(k)$

Los coeficientes de $x(t)$ y $x(at)$ son idénticas, cambia el espaciamiento armónico de ω_0 a $a\omega_0$.

e) Convolución

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\, d\tau$$

$$Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega)X(j\omega)e^{j\omega t}\, d\omega$$

2. TRANSFORMADA DE FOURIER DISCRETA – DFT

a. Transformada de Fourier de secuencias

El físico francés (1768 – 1830) transformó la información de una señal en el tiempo a una información de frecuencia, llamando *espectro* de una señal al conjunto de frecuencias que la constituye, que se obtiene a través de la Transformada de Fourier.

Fourier Directa:

$$\mathcal{F}[x(n)] = X\left(e^{jw}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jwn}, \quad donde\ w = \frac{2\pi}{N}$$

Fourier Inversa:

$$\mathcal{F}^{-1}\left[X\left(e^{jw}\right)\right] = x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{jw}\right)e^{jwn}dw$$

$$X\left(e^{jw}\right) = X_R\left(e^{jw}\right) + jX_I\left(e^{jw}\right)$$

$$X\left(e^{jw}\right) = \left|X\left(e^{jw}\right)\right|e^{j.argX\left(e^{jw}\right)}$$

$$Espectro\ de\ magnitud: \left|X\left(e^{jw}\right)\right|$$

$$Espectro\ de\ fase:\ arg\left[X\left(e^{jw}\right)\right]$$

La energía de una señal, es igual a,

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) * x^*(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{jw}) X^*(e^{jw}) dw$$

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|X(e^{jw})\right|^2 dw$$

Repuesta en frecuencia de un sistema,

$$Si\ \ X(e^{jw}) = \mathcal{F}[x(n)]\ \ y\ \ Y(e^{jw}) = \mathcal{F}[y(n)], \quad entonces,$$

$$Y(e^{jw}) = H(e^{jw}) X(e^{jw}), \quad H(e^{jw})\ es\ la\ respuesta\ en\ frecuencia$$

La respuesta del sistema,

$$y(n) = \mathcal{F}^{-1}[Y(e^{jw})] = \mathcal{F}^{-1}[H(e^{jw}) X(e^{jw})]$$

Ejemplo

Obtener la Transformada de Fourier de la secuencia,

$$x(n) = a^n u(n), \qquad |a| < 1$$

Solución

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jwn}, = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-jwn}, = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-jw})^n$$

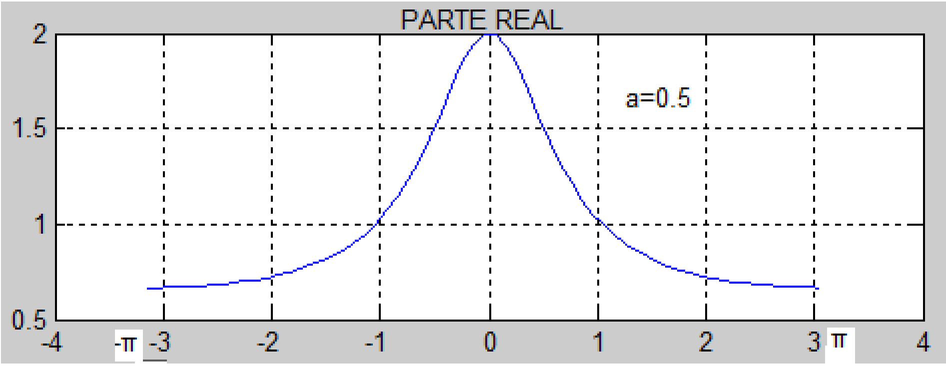
$$X(e^{jw}) = \frac{1}{1 - ae^{-jw}} = \frac{1}{1 - acosw + jasenw} = \frac{1 - acosw - jasenw}{1 + a^2 - 2acosw}$$

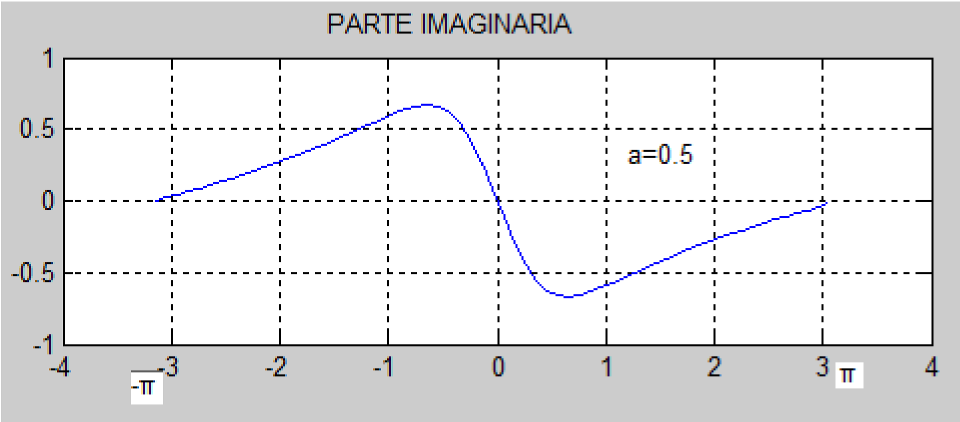
$$X_R(e^{jw}) = \frac{1 - acosw}{1 + a^2 - 2acosw}, \quad parte\ real$$

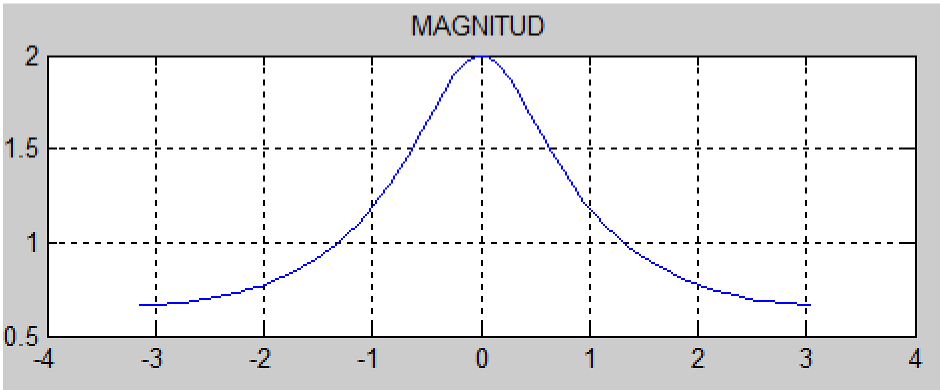
$$X_I(e^{jw}) = \frac{-asenw}{1 + a^2 - 2acosw}, \quad parte\ imaginaria$$

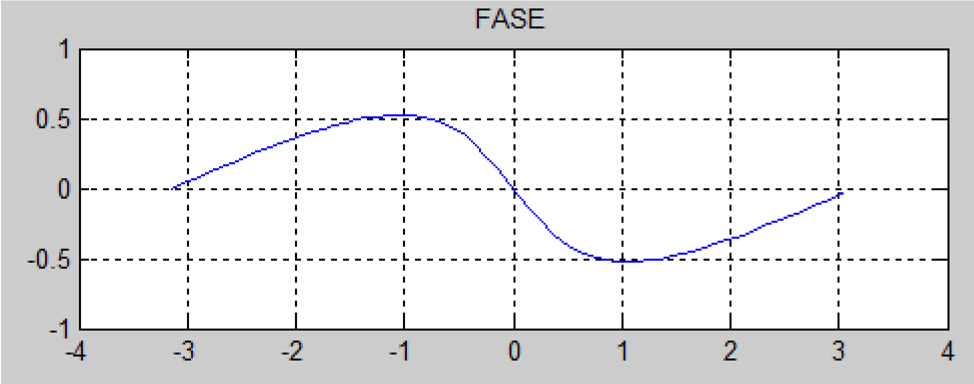
$$|X(e^{jw})| = \frac{1}{[1 + a^2 - 2acosw]^{1/2}}, \quad Espectro\ de\ magnitud$$

$$arg\, X(e^{jw}) = tan^{-1}\left(\frac{-asenw}{1 - acosw}\right) \quad Espectro\ de\ fase$$









b. Transformada de Fourier de una secuencia periódica

Sea una secuencia periódica: x(n) = x(n+ rN), de periodo =N, r = 0,1,2,…….

La representación en series de Fourier es,

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)kn}$$

Donde X(k) son los coeficientes de Fourier, iguales a,

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)kn}$$

Por notación simplificada hacemos,

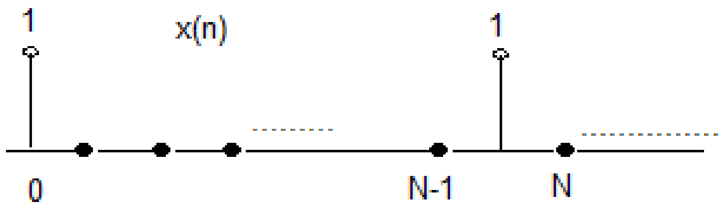
$$W_N^k = e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)k}$$

Entonces,

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn}$$

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, W_N^{-kn}$$

Ejemplo: Tren de impulsos periódicos



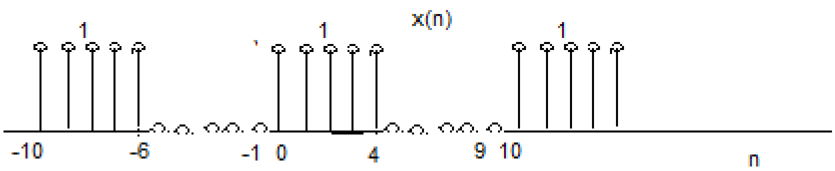
$$x(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(n - rN) = \begin{cases} 1, & n = r\,N, \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Como x(n) = δ(n)   para 0 ≤ n ≤ N-1, entonces,

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n) W_N^{kn} \;=\; W_N^0 = 1$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)kn}$$

Ejemplo: Tren de pulsos rectangulares periódicos

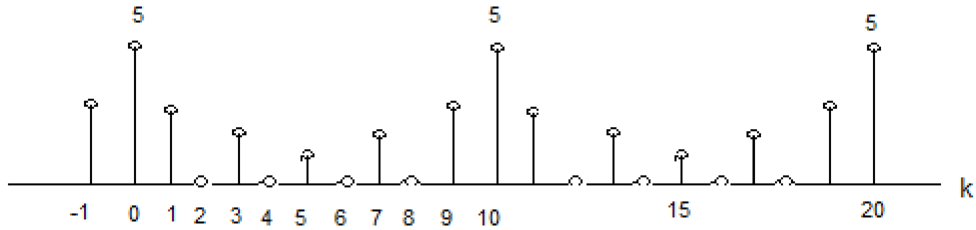


$$X(k) = \sum_{n=0}^{4} W_{10}^{kn} \;=\; \sum_{n=0}^{4} e^{-j\left(\frac{2\pi}{10}\right)kn} \;=$$

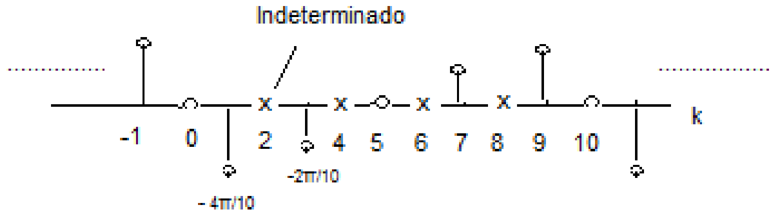
$$\sum_{n=0}^{4} e^{-j\left(\frac{2\pi k}{10}\right)n} \;= e^{-j\left(\frac{4\pi k}{10}\right)} \frac{sen\left(\frac{\pi k}{2}\right)}{sen\left(\frac{\pi k}{10}\right)}$$

Espectro de magnitud:

$$|X(k)| = \frac{sen\left(\frac{\pi k}{2}\right)}{sen\left(\frac{\pi k}{10}\right)}$$



Espectro de fase: $arg[X(k)] = -j(\frac{4\pi}{10})$



Indeterminado porque la señal en esos puntos es cero.

REPRESENTACIÓN DE UNA SEÑAL EN SUS FUNCIONES BÁSICAS

Para resolver muchos problemas de ingeniería es conveniente descomponer una señal dada en suma de funciones básicas. Una forma razonable es tomar la señal de entrada y representarla con la funciones básicas con exponenciales complejas o señales senoidales. Para señales discretas se usan la Transformada de Fourier Discreta DFT y un cálculo eficiente de ella es la transformada Rápida de Fourier FFT.

Para una señal discreta periódicas:

a) Representación en funciones básicas de forma exponencial,

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=o}^{N-1} X(k)e^{jk\frac{2\pi}{N}n}; \quad X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}n}$$

$$si \quad W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}, \qquad entonces,$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n){W_N}^{kn} \quad , \quad x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k){W_N}^{-kn}$$

$\boldsymbol{X(k) = DFT[x(n)],\ \ y \qquad x(n) = IDFT[X(k)]}$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N/2} ReX(k)cos\,(k\frac{2\pi}{N}n) + \sum_{k=0}^{N/2} ImX(k)sen\,(k\frac{2\pi}{N}n)$$

$$ReX(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)cos\,(k\frac{2\pi}{N}n)$$

$$ImX(k) = -\sum_{n=0}^{N-1} x(n)sen\,(k\frac{2\pi}{N}n)$$

b) Representación en funciones básicas de forma trigonométrica

<u>Para N par:</u>

$$x(n) = A(0) + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} A(k)\,cos\left(k\frac{2\pi}{N}n\right) + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} B(k)\,sen\left(k\frac{2\pi}{N}n\right) + A\left(\frac{N}{2}\right)cos\,(\pi n)$$

$$Donde\ \ A(0) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n);\ \ A(k) = \frac{2}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)cos\,(k\frac{2\pi}{N}n)$$

$$B(k) = \frac{2}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\,sen\left(k\frac{2\pi}{N}n\right);\quad A\left(\frac{N}{2}\right) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)cos\,(\pi n)$$

<u>Para N Impar:</u>

$$x(n) = A(0) + \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} A(k)\,cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) + \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} B(k)\,sen\left(\frac{2\pi}{N}kn\right)$$

Los coeficientes son iguales a N par con la excepción de que:

$A(\mathrm{N}/2) = 0$

Relaciones entre la forma trigonométrica y la forma exponencial de x(n):

$$A(0) = \frac{X(0)}{N}$$

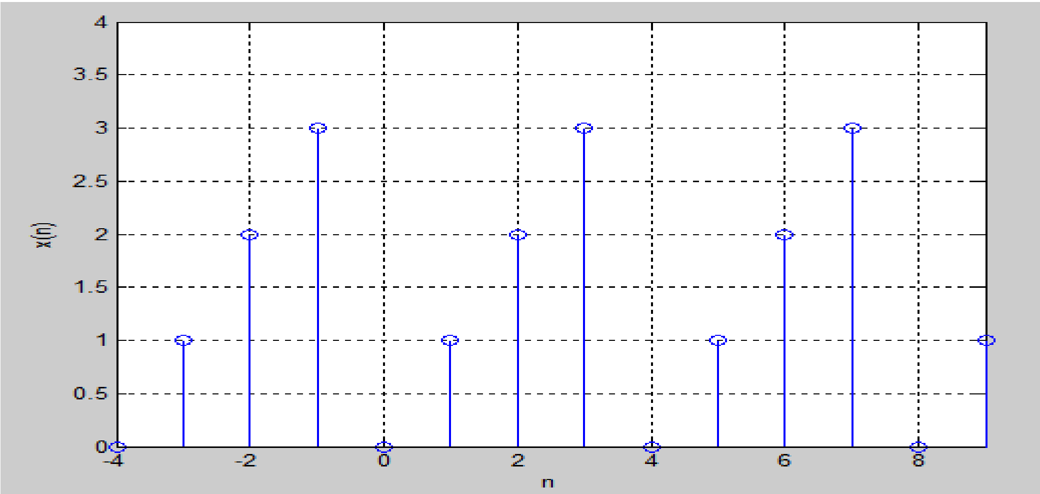
$$A(k) = \frac{[X(k) + X(N-k)]}{N}$$

$$B(k) = \frac{j[X(k) - X(N-k)]}{N}$$

$$A(\mathrm{N}/2) = \frac{X(N/2)}{N}$$

Ejemplo: Señal discreta periódica

Encontrar la forma exponencial y trigonométrica de la señal discreta x(n):



a) Forma exponencial

Periodo N = 4

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n){W_N}^{kn},$$

$$donde \qquad W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}, \quad {W_N}^k = e^{-j\frac{2\pi}{N}k}$$

$${W_4}^1 = e^{-j\frac{2\pi}{4}1} = e^{-j\frac{\pi}{2}} = cos\frac{\pi}{2} - jsen\frac{\pi}{2} = -j$$

$${W_4}^2 = {W_4}^1{W_4}^1 = (-j)(-j) = -1$$

$${W_4}^3 = {W_4}^2{W_4}^1 = (-1)(-j) = j$$

$$W_4^{\ 4} = W_4^{\ 3} W_4^{\ 1} = (j)(-j) = 1$$

$$X(0) = \sum_{n=0}^{4-1} x(n) W_4^{\ 0n} = x(0) + x(1) + x(2) + x(3) = 0 + 1 + 2 + 3 = 6$$

$$X(1) = \sum_{n=0}^{4-1} x(n) W_4^{\ 1n} = x(0) W_4^{\ 0} + x(1) W_4^{\ 1} + x(2) W_4^{\ 2} + x(3) W_4^{\ 3}$$

$$= 0(1) + 1(-j) + 2(-1) + 3(j) = -2 + 2j$$

$$X(2) = \sum_{n=0}^{4-1} x(n) W_4^{\ 2n} = x(0) W_4^{\ 0} + x(1) W_4^{\ 2} + x(2) W_4^{\ 4} + x(3) W_4^{\ 6}$$

$$= 0(1) + 1(-1) + 2(1) + 3(-1) = -2$$

$$X(3) = \sum_{n=0}^{4-1} x(n) W_4^{\ 3n} = x(0) W_4^{\ 0} + x(1) W_4^{\ 3} + x(2) W_4^{\ 6} + x(3) W_4^{\ 9}$$

$$= 0(1) + 1(j) + 2(-1) + 3(-j) = -2 - 2j$$

$$X(k) = [6, -2 + 2j, -2, -2 - 2j]$$

Matlab:

```
xn= [0 1 2 3];
Xk= fft(xn)
```

Se realizan 4*4 multiplicaciones=N^2 (Suma de productos) si se tiene una señal senoidal de 1000 muestras → el número de multiplicaciones seria $1000^2 = 1'000.000$ de sumas y productos.

Una forma de reducir el número de operaciones es utilizar el algoritmo de la FFT de Cooley- Tukey es romper la transformada en transformadas más pequeñas y luego combinarlos para obtener la transformada total.

b) Forma trigonométrica

$$A(0) = \frac{X(0)}{N} = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$A(1) = \frac{[X(1) + X(4-1)]}{4} = -1$$

$$A(2) = A\left(\frac{N}{2}\right) = \frac{X(\frac{4}{2})}{4} = -\frac{1}{2} = -0.5$$

$$B(1) = \frac{j[X(1) - X(4-1)]}{4} = -1$$

$$x(n) = A(0) + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} A(k)\cos\left(k\frac{2\pi}{N}n\right) + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} B(k)\,sen\left(k\frac{2\pi}{N}n\right) + A\left(\frac{N}{2}\right)\cos(\pi n)$$

$$x(n) = A(0) + A(1)\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + B(1)sen\left(\frac{\pi}{2}n\right) + A(2)\cos(\pi n)$$

$$x(n) = 1.5 - \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) - sen\left(\frac{\pi}{2}n\right) - 0.5\cos(\pi n)$$

Forma matricial

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_4{}^0 & W_4{}^0 & W_4{}^0 & W_4{}^0 \\ W_4{}^0 & W_4{}^1 & W_4{}^2 & W_4{}^3 \\ W_4{}^0 & W_4{}^2 & W_4{}^0 & W_4{}^2 \\ W_4{}^0 & W_4{}^3 & W_4{}^2 & W_4{}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

TRANSFORMADA DE FOURIER DE SECUENCIAS FINITAS

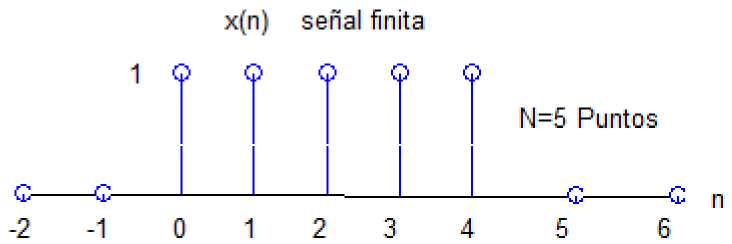
Sea x(n) una secuencia finita de longitud N

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn}; \quad 0 \le k \le N-1$$

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)kn} = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-kn}; \quad 0 \le n \le N-1$$

Ejemplo: Transformada de Fourier de una ventana (pulso rectangular)

- De 5 puntos (N=5)



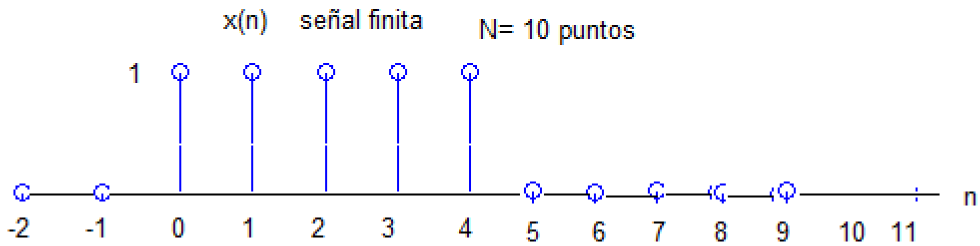
$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)kn} = \sum_{n=0}^{4} e^{-j\left(\frac{2\pi}{5}\right)kn} = \sum_{n=0}^{4} e^{-j\left(\frac{2\pi}{5}k\right)n}$,

$$X(k) = e^{-j\left(\frac{4\pi}{5}\right)k}.\frac{sen(\pi k)}{sen(\frac{\pi k}{5})}, \quad w(periódica) = \frac{2\pi}{N}, se\ repite\ cada\ \pi$$

$$k = 0, \qquad |X(0)| = \frac{\pi cos(0)}{\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos(0)} = 5, \quad arg[X(k)] = 0$$

$$k = 1, 2,3,4 \quad |X(4)| = \frac{sen(\pi k)}{sen(\frac{\pi}{5}k)} = 0, \quad arg[X(k)] = indeterminado$$

- <u>De 10 puntos (N=10)</u>



$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)kn} = \sum_{n=0}^{4} e^{-j\left(\frac{2\pi}{10}\right)kn} = \sum_{n=0}^{4} e^{-j\left(\frac{2\pi}{10}k\right)n}$$

$$X(k) = e^{-j\left(\frac{4\pi}{10}\right)k}.\frac{sen(\frac{\pi k}{2})}{sen(\frac{\pi k}{10})}$$

$$k = 0, \qquad |X(0)| = \left|\frac{(\frac{\pi}{2})cos(0)}{\left(\frac{\pi}{10}\right)\cos(0)}\right| = 5, \quad arg[X(k)] = 0$$

$$k = 1, \qquad |X(1)| = \left|\frac{sen\left(\frac{\pi}{2}\right)}{sen\left(\frac{\pi}{10}\right)}\right| = 3.24, \quad arg[X(k)] = -\frac{4\pi}{10} = -0.4\pi$$

$$k = 2,4,6,8 \quad |X(k)| = \left|\frac{sen\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{sen\left(\frac{\pi}{10}k\right)}\right| = 0, \quad arg[X(k)] = indeterminado$$

$$k = 3, \quad |X(k)| = \left|\frac{sen\left(\frac{\pi}{2}3\right)}{sen\left(\frac{\pi}{10}3\right)}\right| = 1.24,$$

$$arg[X(k)] = -\left(\frac{4\pi}{10}\right)3 = -1.2\pi + \pi = -0.2\pi$$

$$k = 5, \quad |X(k)| = \left|\frac{sen\left(\frac{\pi}{2}5\right)}{sen\left(\frac{\pi}{10}5\right)}\right| = 1.0,$$

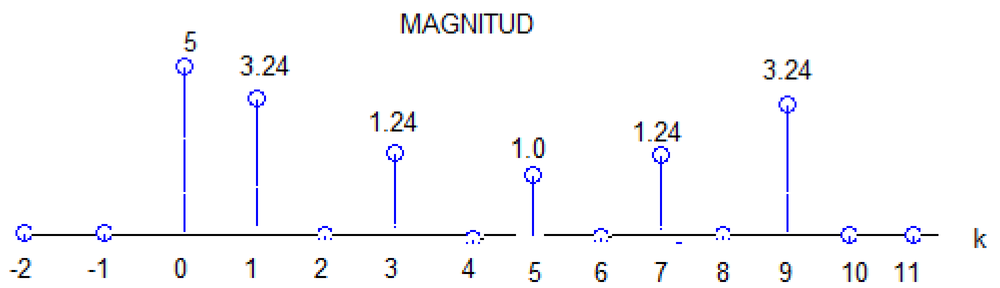
$$arg[X(k)] = -\left(\frac{4\pi}{10}\right)5 = -2\pi + 2\pi = 0$$

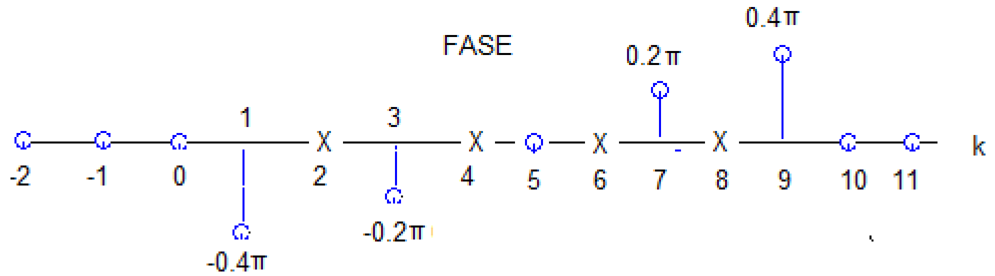
$$k = 7, \quad |X(k)| = \left|\frac{sen\left(\frac{\pi}{2}7\right)}{sen\left(\frac{\pi}{10}7\right)}\right| = 1.24,$$

$$arg[X(k)] = -\left(\frac{4\pi}{10}\right)7 = -2.8\pi + 3\pi = 0.2\pi$$

$$k = 9, \quad |X(k)| = \left|\frac{sen\left(\frac{\pi}{2}9\right)}{sen\left(\frac{\pi}{10}9\right)}\right| = 3.24,$$

$$arg[X(k)] = -\left(\frac{4\pi}{10}\right)9 = -3.6\pi + 4\pi = 0.4\pi \quad \pi$$





PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

- Linealidad

$Si\ x_3(n) = ax_1(n) + bx_2(n), \quad entonces,$

$X_3(k) = aX_1(k) + bX_2(k)$

- Corrimiento circular

$Si\ \ x_1(n) = x[(n-m)]_N \qquad 0 \le n \le N-1, \quad entonces,$

$X_1(k) = e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)kn} X(k)$

- Dualidad

$x(n) \overset{DFT}{\leftrightarrow} X(k) \ \Rightarrow X(n) \overset{DFT}{\leftrightarrow} X(-k)_N\ , \qquad 0 \le k \le N-1$

- Simetría

$Sea,\ \ x^*(n){:}\ Secuencia\ conjugada\ simétrica$

$x^*(-n)_N\ :\ Secuencia\ conjugada\ antisimétrica$

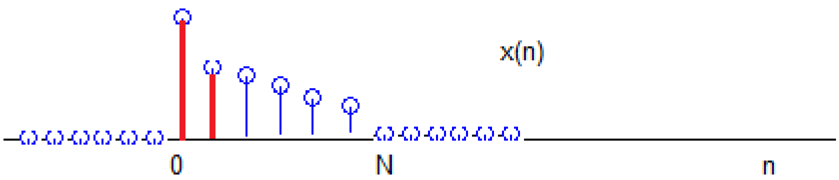
La transformada de Fourier es,

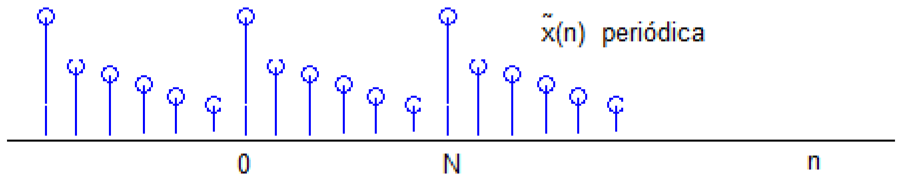
$X^*(n) \overset{DFT}{\leftrightarrow} X^*[(-k)]_N \qquad 0 \le n \le N-1$

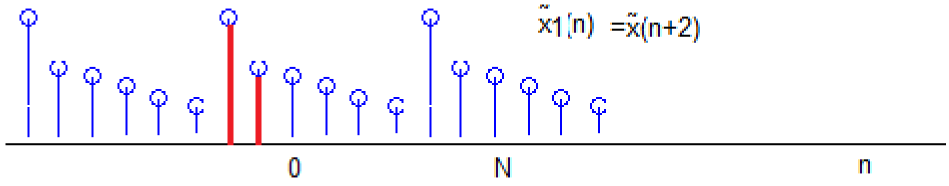
$X^*[(-n)]_N \ \overset{DFT}{\leftrightarrow}\ X^*(k) \qquad 0 \le n \le N-1$

$X(k) = X^*(k) \quad solamente\ si\ x(n) es\ real$

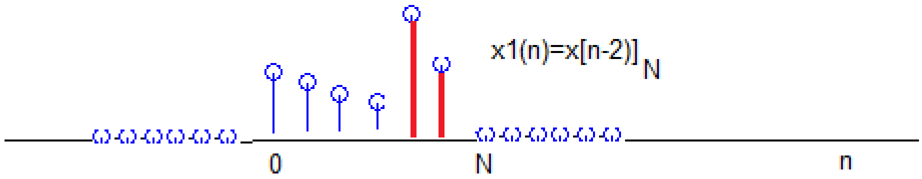
Ejemplo de corrimiento circular







Corrimiento lineal



Corrimiento circular

Convolución circular de N puntos

$Sea\ \ x_1(n),\ \ x_2(n)\ secuencias\ finitas\ de\ duración\ N\ \ y\ X_1(k),\ \ X_2(k)\ \ sus\ \ \ DTF$

La convolución circular entre x1(n) y x2(n) es:

$$x3(n) = x1(n) \ (\mathrm{N})\ x2(n) = x2(n)\ (\mathrm{N})\ x1(n)$$

(N) Convolución circular

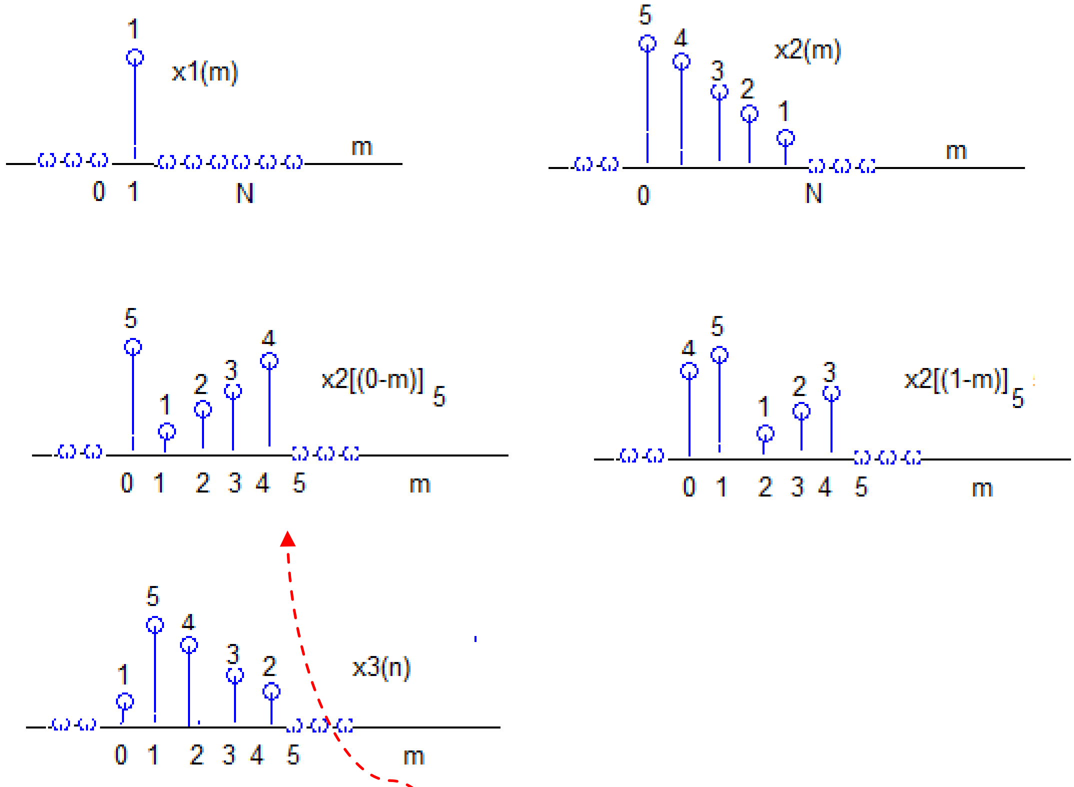
$$x3(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x2(m)x1(n-m)_N = \sum_{m=0}^{N-1} x1(m)x2(n-m)_N$$

Ejemplo de convolución circular

Hallar la convolución circular entre las señales x1(n y x2 dadas.
$x1(n) = \delta(n-1)$

$$x3(n) = x1(n)\ (\mathrm{N})\ x2(n) = \sum_{m=0}^{4} x1(m)x2[(n-m)]_5$$

Gráficamente,



Analíticamente,

$$x3(n) = \sum_{m=0}^{4} x1(m)x2[(n-m)]_5 = x1(1)x2[(n-1)]_5 = x2[(n-1)]_5$$

$n = 0,\ \ x3(0) = x2[(-1)]_5 = 1, \quad m = 1$

$n = 1,\ \ x3(1) = x2[(0)]_5 = 5, \quad m = 0$

$n = 2,\ \ x3(2) = x2[(1)]_5 = 4, \quad m = -1, \quad m = 4 \quad N = 5$

$n = 3,\ \ x3(3) = x2[(2)]_5 = 3, \quad m = -2, \quad m = 3$

$n = 4,\ \ x3(4) = x2[(3)]_5 = 2, \quad m = -3, \quad m = 2$

TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER - FFT

En las últimas décadas se han investigado muchos métodos para reducir el número de multiplicaciones en el cálculo de la DFT. La técnica más importante y popularizada es la de *J. W. Cooley – John Tukey* (1915-2000) basada en romper la transformada en transformadas más pequeñas y luego combinarlas para obtener la transformada total (1965). El método es el proceso de decimación en el tiempo y en frecuencia.

FFT Decimación en el tiempo

El número de puntos se asume potencia de 2, o sea, $N=2^y$. La decimación en el dominio consiste en romper la transformada de N puntos en dos transformadas de N/2 puntos, luego cada transformada de N/2 puntos en dos transformadas de N/4 puntos y continuar la división hasta que se llegue a una transformada de 2 puntos.

La señal discreta se divide en la parte par e impar:

x(n) = [x(0), x(1), x(2), x(3), ……, x(N/2-1),………., x(N-1)

Pares: [x(0), x(2), x(4),……., x(N-2)

Impares: [x(1), x(3), x(5),……, x(N-1)

$$DFT[x(n)] = X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n){W_N}^{kn}$$

Rompiendo las pares e impares:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-2} x(n){W_N}^{kn} + \sum_{n=1}^{N-1} x(n){W_N}^{kn}$$

(n = par) (n = Impar)

Pares: n = 2 r → r = n/2 Impares: n = 2 r +1 → r = (n-1)/2

$$X(k) = \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r){W_N}^{2rk} + \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r+1){W_N}^{(2r+1)k}$$

$${W_N}^{2rk} = ({W_N}^2)^{rk} = e^{-j\frac{2\pi}{N}2rk} = e^{-j\frac{2\pi}{\frac{N}{2}}rk} = {W_{N/2}}^{rk}$$

$$X(k) = \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r){W_{N/2}}^{rk} + {W_N}^{k} \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r+1){W_{N/2}}^{rk}$$

$G(k) = DFT\ de \frac{N}{2} puntos\ pares \qquad H(k) = DFT\ de \frac{N}{2} puntos\ impares$

$\boldsymbol{X(k) = G(k) + W_N{}^{k} H(k)}$

$X(0) = G(0) + W_N{}^{0} H(0)$

$X(1) = G(1) + W_N{}^{1} H(1)$

$X(2) = G(2) + W_N{}^{2} H(2)$

$X(3) = G(3) + W_N{}^{3} H(3)$

.

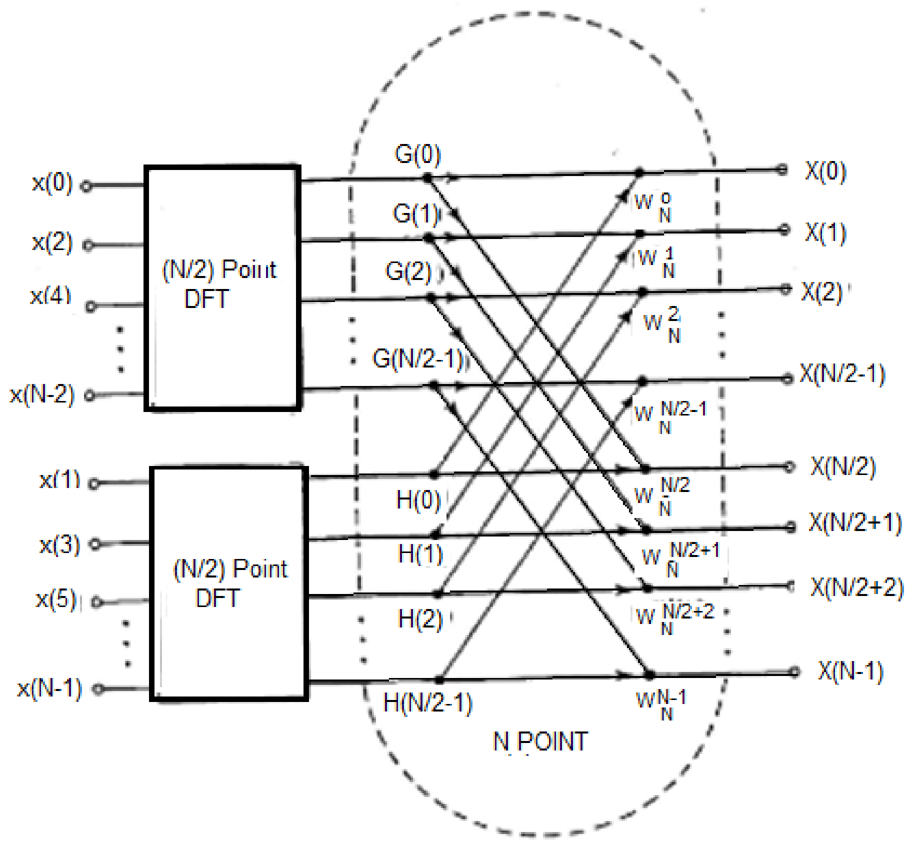
.

$X(N/2-1) = G(N/2-1) + W_N{}^{\frac{N}{2}-1} H(N/2-1)$

.

.

$X(N-1) = G(N/2-1) + W_N{}^{N-1} H(N/2-1)$

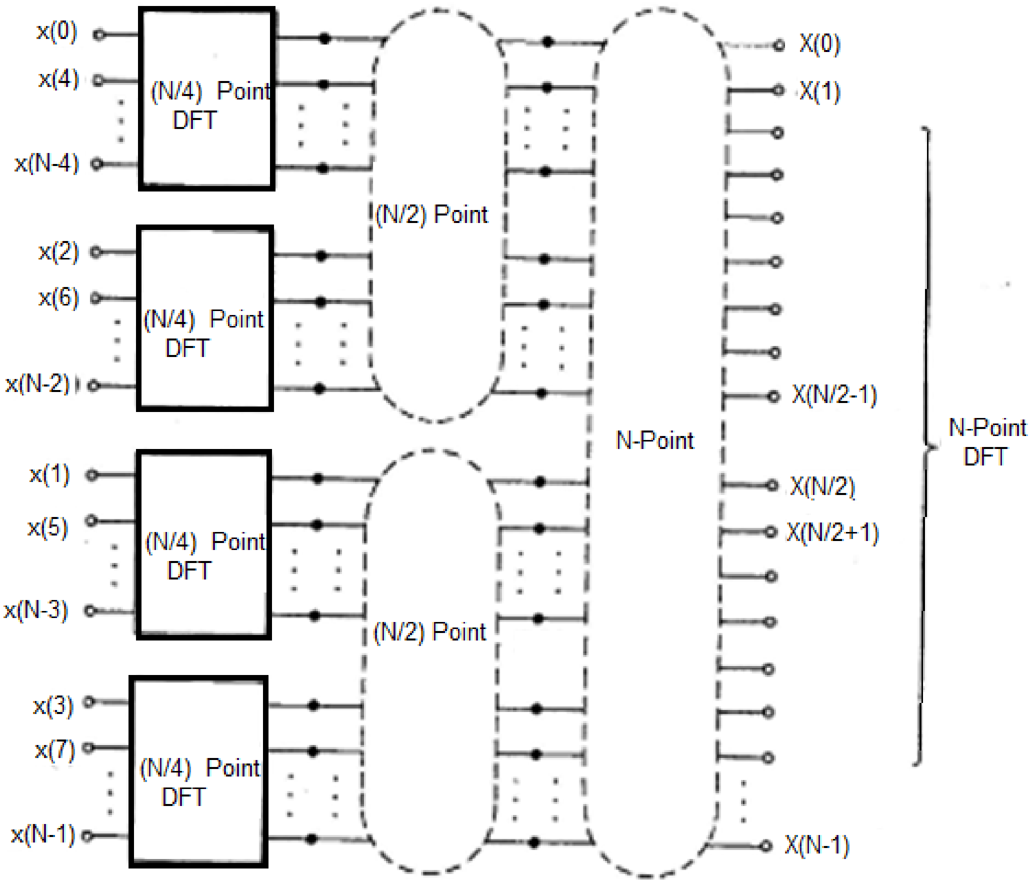


El número de multiplicaciones:

$$\# \, Multiplicaciones = \left(\frac{N}{2}\right)^2 + \left(\frac{N}{2}\right)^2 + N = N + \frac{N^2}{2} < N^2$$

Si N=8, el # multiplicaciones = 40 < 64

Ahora cada secuencia de N/2 puntos puede ser decimada en dos secuencias de longitud N/4.



Ahora el número de multiplicaciones es:

$$\# \, Multiplicaciones = 4\left(\frac{N}{4}\right)^2 + 2\left(\frac{N}{2}\right) + N = \frac{N^2}{4} + 2N$$

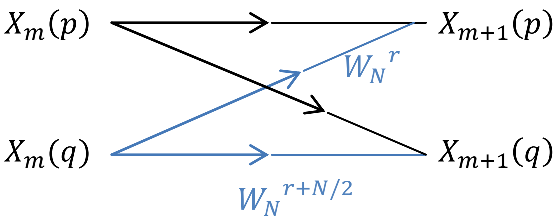
Para N=8; #multiplicaciones = 32 < 40

En general:

$$X_{m+1}(p) = X_m(p) + {W_N}^r X_m(q)$$

$$X_{m+1}(q) = X_m(p) + {W_N}^{r+N/2} X_m(q)$$

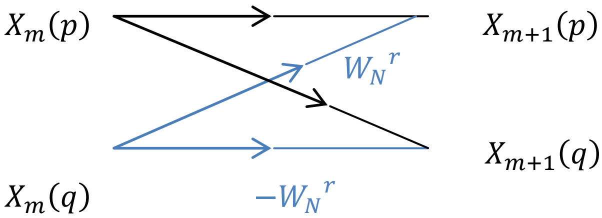
Que se puede representar como:



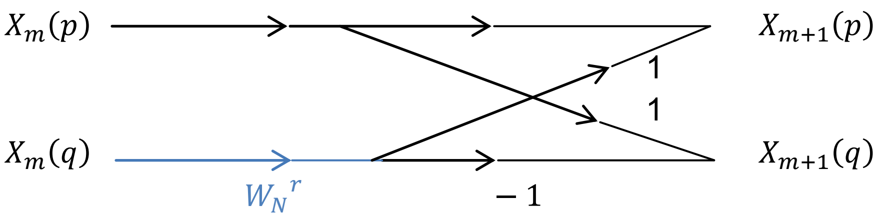
Simplificando:

$$W_N{}^{r+N/2} = W_N{}^r . W_N{}^{N/2} = W_N{}^r . e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)\frac{N}{2}} = W_N{}^r . e^{-j\pi} = -W_N{}^r$$

El esquema queda de la siguiente forma:



Arreglando de otra forma el esquema:



Se reduce el número de operaciones (Cooley – Tukey) a:

$$\# \, Multiplicaciones = \frac{N}{2} log_2 N$$

$$\# \, Sumas = N . log_2 N$$

TRANSFORMADA DE FOURIER CON MATLAB

En Matlab la Transformada de Fourier Discreta DFT de x(n) se calcula con el comando:

xn = fft (Xk)

y la Transformada Inversa de Fourier Discreta X(k):

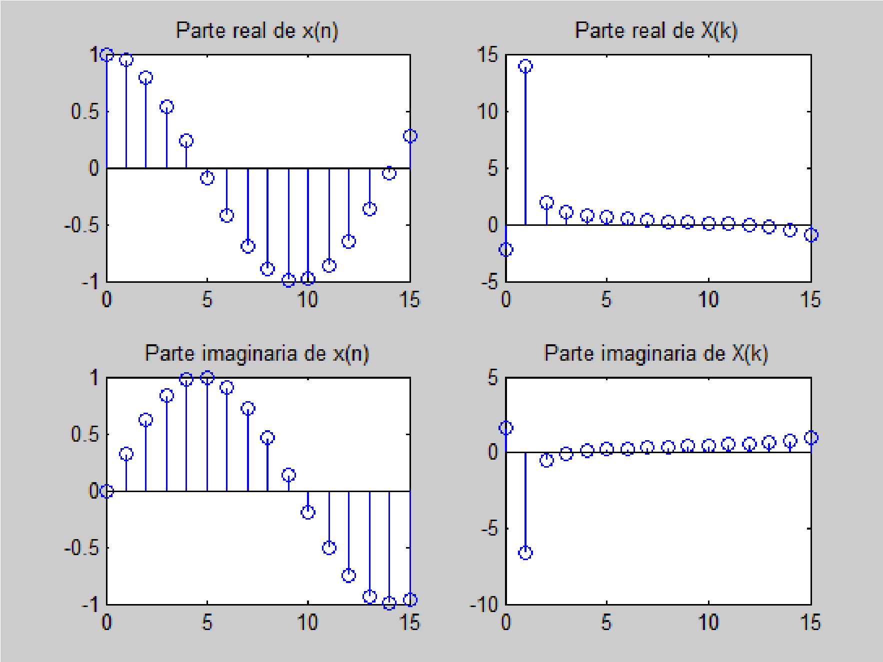
Xk = ifft (xn)

EJEMPLO 2: Obtener parte real y parte imaginaria

A continuación se tiene la parte real e imaginaria de la señal y de su DFT

$$x(n) = e^{j\frac{n}{3}}$$

```
%DFT PARTE REAL E IMAGINARIA
clear all
n=0:15;
xn=exp(j*n/3);
Xk=fft(xn);
k=n;
subplot(221)
stem(k,real(Xk));
title('Parte real de X(k)')
subplot(223)
stem(k,imag(Xk));
title('Parte imaginaria de X(k)')
%recuperar la señal x(n)
xn=ifft(Xk);
subplot(222)
stem(n,real(xn));
title('Parte real de x(n)')
subplot(224)
stem(n,imag(xn));
title('Parte imaginaria de x(n)')
```

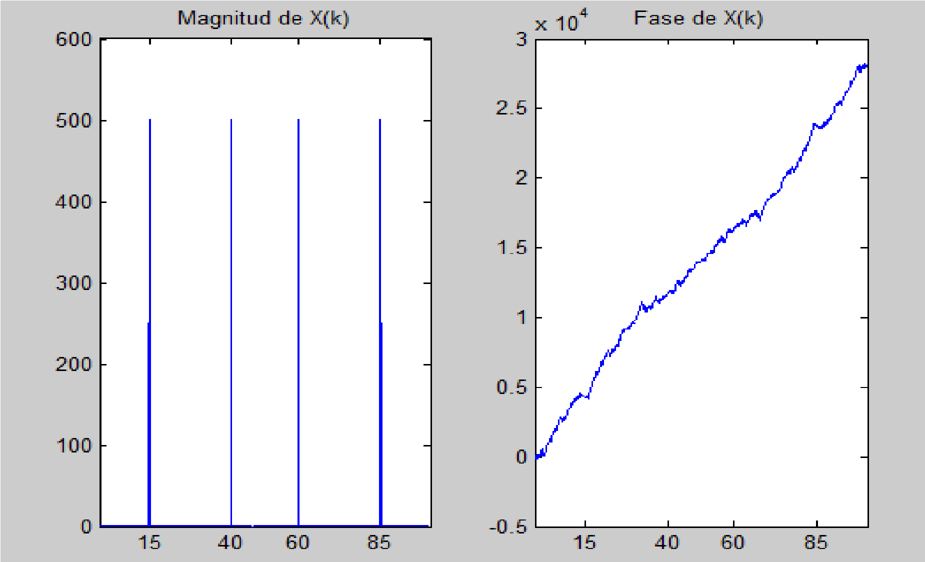


EJEMPLO 3: Obtener la magnitud y la fase

Obtener la magnitud y fase de la DFT de la señal,

$$x(n) = sen(2\pi f1t) + sen(2\pi f2t), \;\; f1 = 15\ Hz \;\; y\ f2 = 40\ Hz$$

```
%MAGNITUD Y FASE
clear all
t=0:0.01:9.99; % 1000 puntos
f1=15;f2=40;
xn=sin(2*pi*f1*t)+sin(2*pi*f2*t);
Xk=fft(xn);
mag=abs(Xk);
f=0:0.1:99.9;
subplot(121)
plot(f,mag)
title('Magnitud de X(k)')
set(gca,'Xtick',[15 40 60 85])
subplot(122)
fase=unwrap(angle(Xk));
plot(f,fase*180/pi)
title('Fase de X(k)')
set(gca,'Xtick',[15 40 60 85])
```



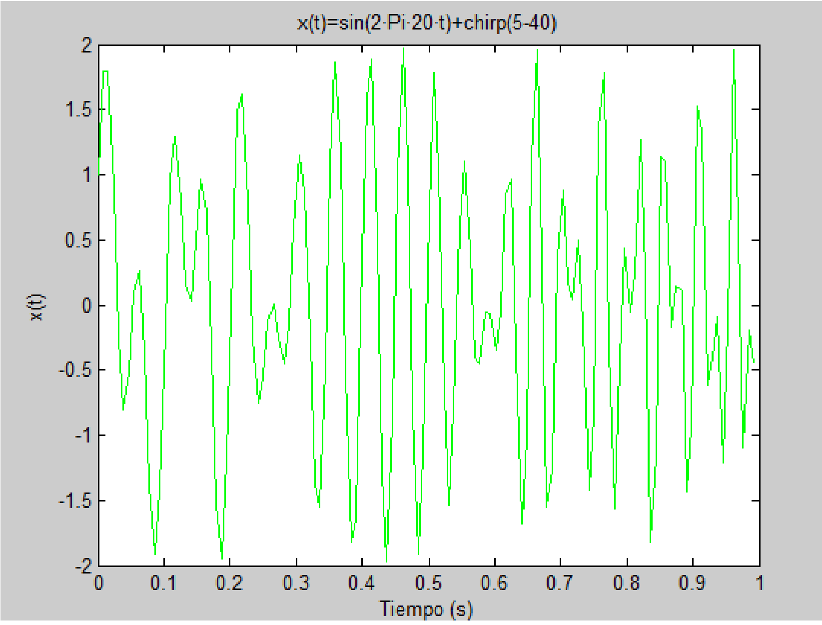
APLICACIONES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER - FFT

1. RESPUESTA EN FRECUENCIA

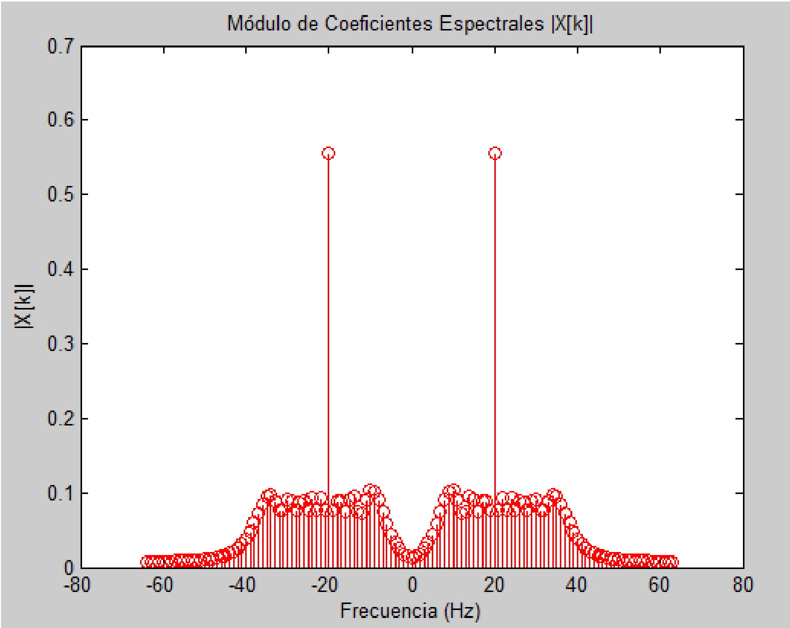
Obtener la FFT de una señal senoidal de 20 Hz sumada a una señal tipo chirp con un desplazamiento desde 5 hasta 40 Hz en un tiempo D.

```
clear all
D=1; N=128;
ts=D/N;
d=ts/2;
t=0:ts:D-d;
x=sin(2*pi*20*t)+chirp(t,5,D,40);
X=fft(x);
%Reordenar X
M=N/2;
Xaux=X;
X(M+1:N)=Xaux(1:M);
X(1:M)=Xaux(M+1:N);
Xm=abs(X)/N;
Xf=unwrap(angle(X))*180/pi;
%Reordenar los ¡ndices k
faux(M+1:N)=0:M-1;
faux(1:M)=-M:-1;
f=faux/D;
% Gráfica de la señal
figure;
```

```
plot(t,x,'-g');zoom;
xlabel('Tiempo (s)');ylabel('x(t)');
title('x(t)=sin(2·Pi·20·t)+chirp(5-40)');
```

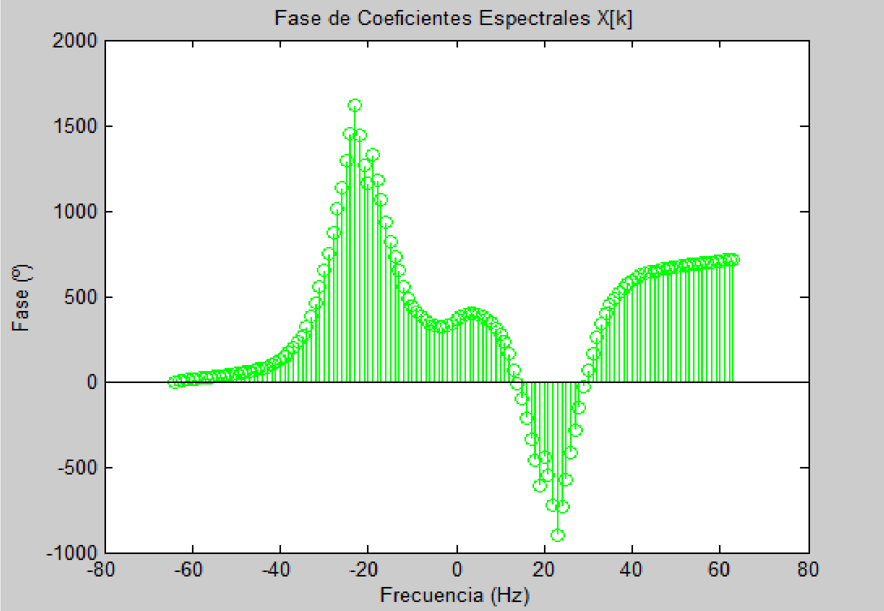



```
% Graficar fft de xn Xk
figure;
stem(f,Xm,'r')
zoom;
xlabel('Frecuencia (Hz)');ylabel('|X[k]|');
title('Módulo de Coeficientes Espectrales |X[k]|');
```

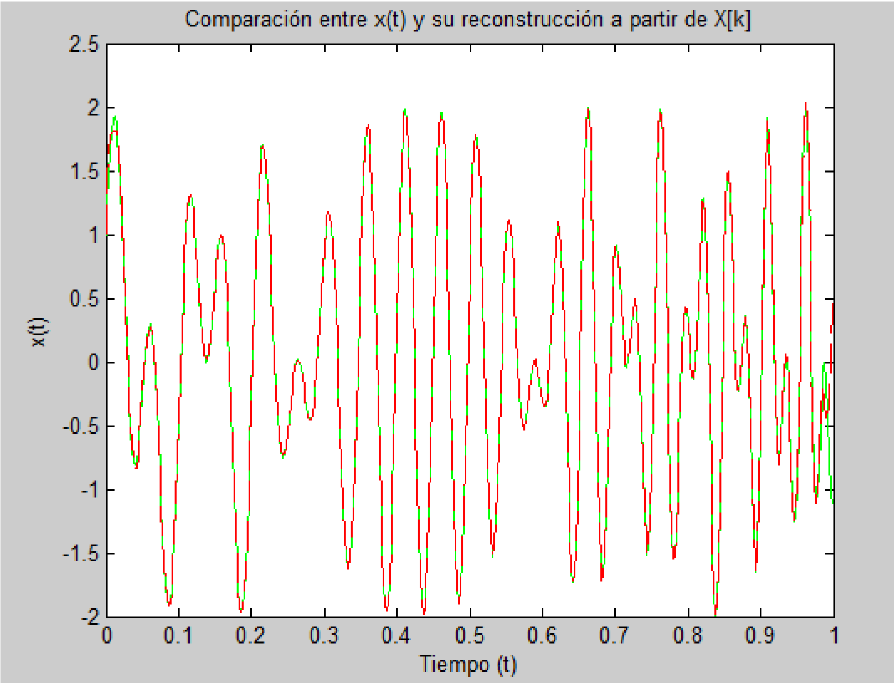



```
% Grafica de la fase
figure;
stem(f,Xf,'g');zoom;
xlabel('Frecuencia (Hz)');ylabel('Fase (°)');
```

```
title('Fase de Coeficientes Espectrales X[k]');
```




```
% Reconstrucción de la señal a partir de los X[k]
% Utilizamos un mayor número de puntos fs=500 Hz

fs=500;
ts=1/fs;
d=ts/2;
t=0:ts:D-d;
Ns=length(t);
%x=sin(2*pi*20*t)+chirp([5 40]*ts,Ns);
x=sin(2*pi*20*t)+chirp(t,5,D,40);
xr=zeros(1,Ns);
for i=1:Ns
    for k=1:N
        xr(i)=xr(i)+X(k)*exp(j*2*pi*f(k)*ts*(i-1))/N;
    end
end

figure;plot(t,x,'g-');hold on;plot(t,xr,'r--');zoom;
title('Comparación entre x(t) y su reconstrucción a partir de
X[k]');
xlabel('Tiempo (t)');ylabel('x(t)');
```

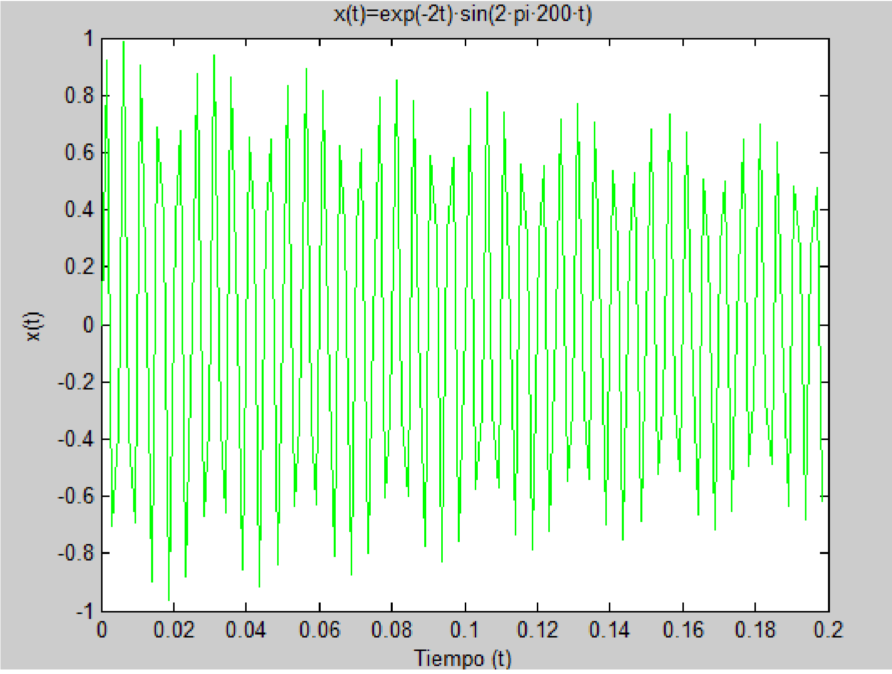


2. MODULACIÓN EN AMPLITUD

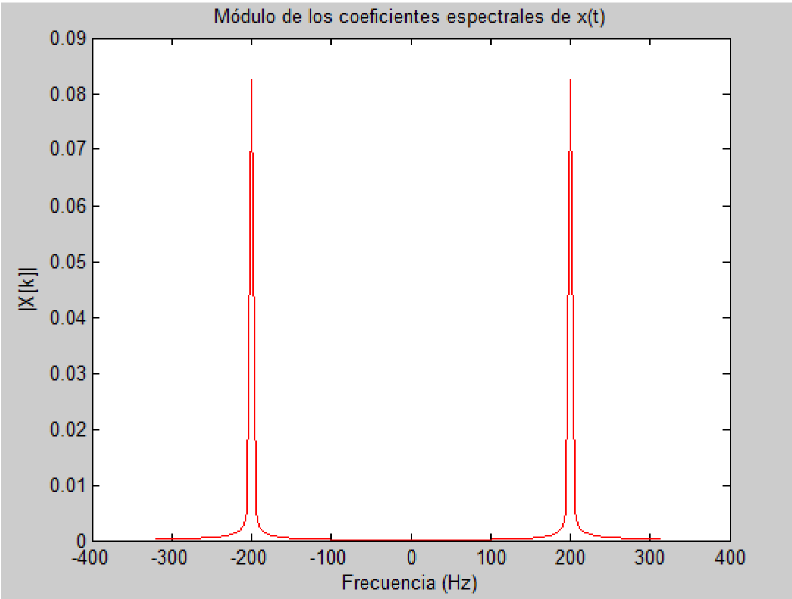
Obtener la FFT de una señal exponencial modulada en amplitud con una frecuencia portadora de 200 Hz. N es el número de puntos de muestreo durante D segundos de la señal. Se requiere una frecuencia de muestreo de por lo menos 400 Hz, N/D>400

```
clear all
N=128; D=0.2;
ts=D/N;
d=ts/2;
t=0:ts:D-d;
x=exp(-2*t).*sin(2*pi*200*t);
X=fft(x);

%Reordenar X
M=N/2;
Xaux=X;
X(M+1:N)=Xaux(1:M);X(1:M)=Xaux(M+1:N);

Xm=abs(X)*ts;
Xf=unwrap(angle(X))*180/pi;

%Reordenar los ¡ndices k
faux(M+1:N)=0:M-1;faux(1:M)=-M:-1;
f=faux/D;
```

```
figure;
plot(t,x,'-g');zoom;
title('x(t)=exp(-2t)·sin(2·pi·200·t)');
xlabel('Tiempo (t)');ylabel('x(t)');
```

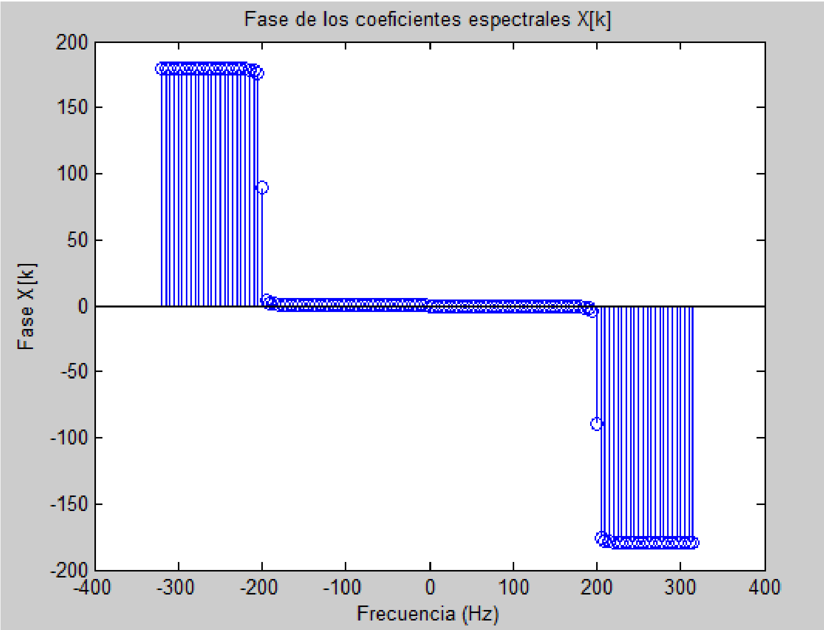



```
figure;
plot(f,Xm,'-r')
title('Módulo de los coeficientes espectrales de x(t)');
xlabel('Frecuencia (Hz)');ylabel('|X[k]|');
```




```
figure;
stem(f,Xf,'-b');zoom;
```

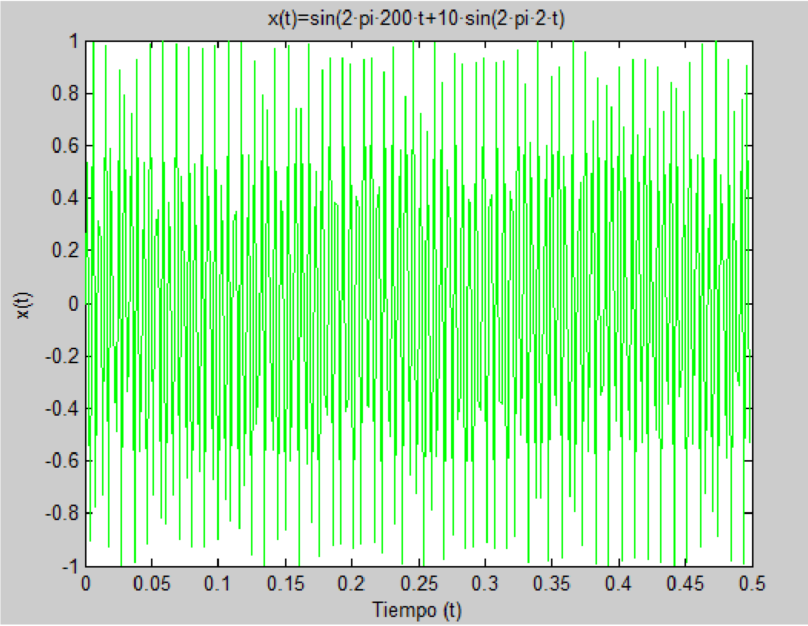
```
title('Fase de los coeficientes espectrales X[k]');
xlabel('Frecuencia (Hz)');ylabel('Fase X[k]');
```



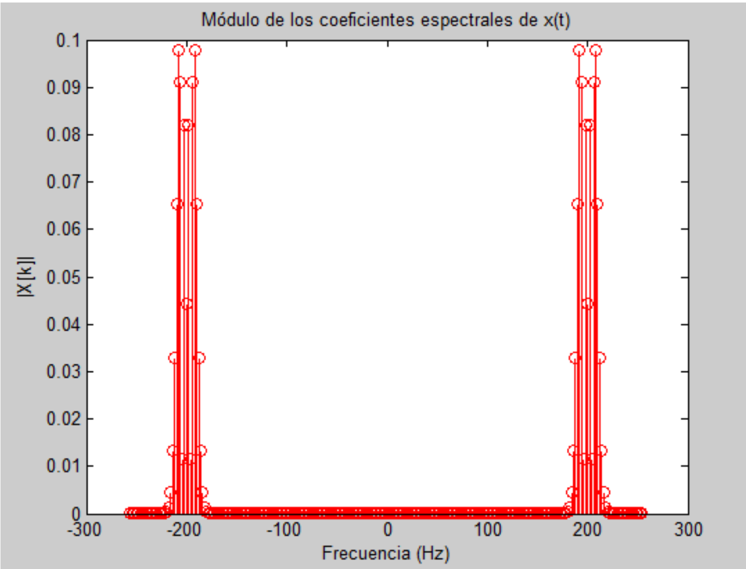
3. MODULACIÓN EN FRECUENCIA

```
clear all
D=0.5;N=256;
ts=D/N;
d=ts/2;
t=0:ts:D-d;
x=sin(2*pi*200*t+5*sin(2*pi*2*t));
X=fft(x);

%Reordenar X
M=N/2;
Xaux=X;X(M+1:N)=Xaux(1:M);
X(1:M)=Xaux(M+1:N);

Xm=abs(X)*ts;
Xf=unwrap(angle(X))*180/pi;

%Reordenar los ¡ndices k
faux(M+1:N)=0:M-1;faux(1:M)=-M:-1;
f=faux/D;

figure;
plot(t,x,'-g');zoom;
title('x(t)=sin(2·pi·200·t+10·sin(2·pi·2·t)');
```

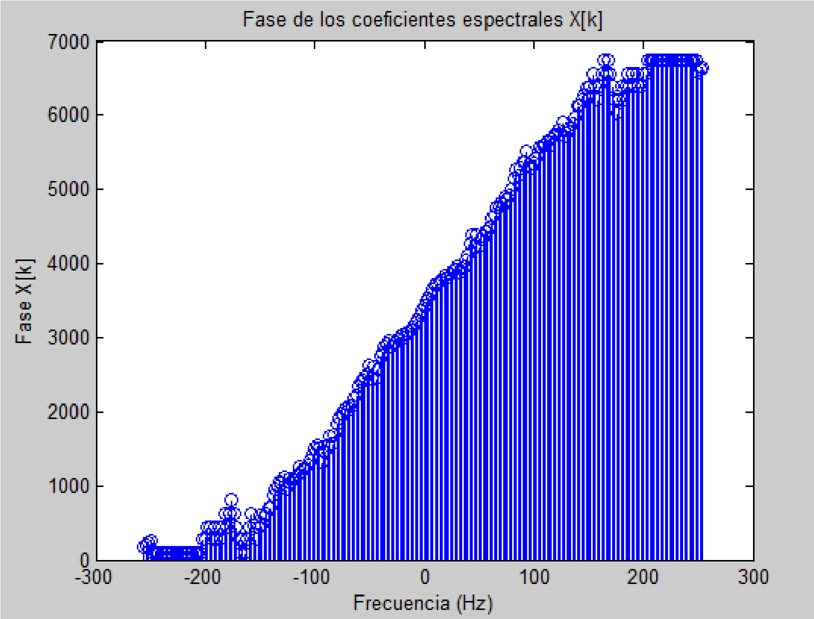
```
xlabel('Tiempo (t)');ylabel('x(t)');
```




```
figure;
stem(f,Xm,'-r');zoom;
title('Módulo de los coeficientes espectrales de x(t)');
xlabel('Frecuencia (Hz)');ylabel('|X[k]|');
```




```
figure;
stem(f,Xf,'-b');zoom;
title('Fase de los coeficientes espectrales X[k]');
xlabel('Frecuencia (Hz)');ylabel('Fase X[k]');
```



4. ANÁLISIS ESPECTRAL

El análisis espectral describe la distribución en función de la frecuencia de la potencia contenida en una señal, basado en un conjunto finito de datos. En términos generales, la manera de estimar la PSD (densidad de potencia espectral) de un proceso es encontrar la Transformada de Fourier discreta DFT (usando la FFT) y tomar la magnitud al cuadrado del resultado. Esta estimación es llamada Periodograma.

El Periodograma estimado de la PSD de una señal de longitud L para un número de puntos de frecuencia N (N > L) es:

$$\hat{P}_{xx}[f_k] = \frac{|X_L[f_k]|^2}{f_s L}, \qquad f_k = \frac{k f_s}{N}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

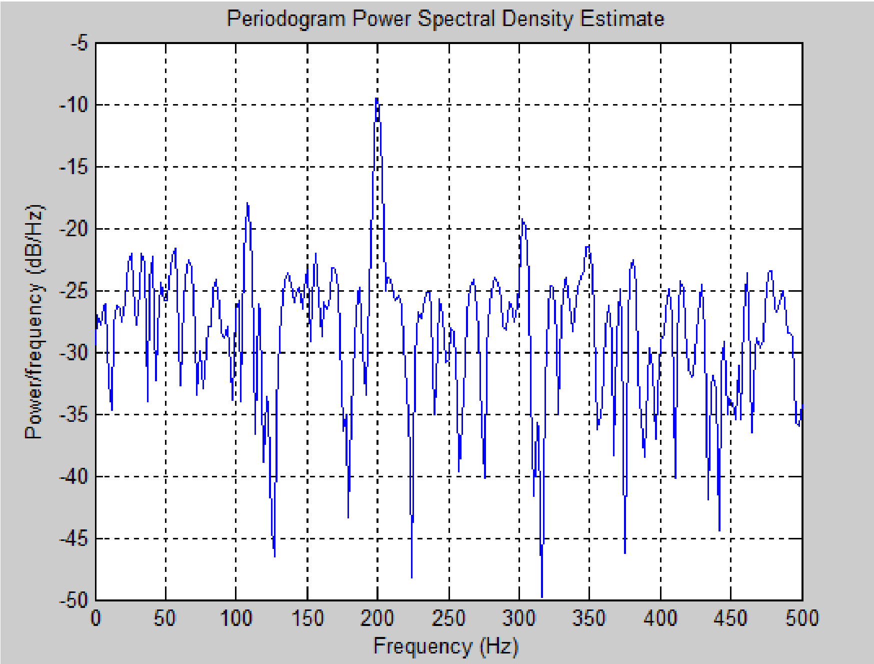
Donde,

$$X_L[f_k] = \sum_{n=0}^{N-1} x_L[n] e^{-2\pi j k n / N}$$

Para una señal coseno de 200 Hz, añadir ruido y observar su contenido espectral:

```
clear all
Fs=1000;
t=0:1/Fs:.3;
x=cos(2*pi*t*200)+randn(size(t));
Hs=spectrum.periodogram('Hamming');
psd(Hs,x,'Fs',Fs)
% Potencia promedio
```

```
Hdsp=psd(Hs,x,'Fs',Fs);
Pow = avgpower(Hdsp)
% Pow = 1.6727
```



TRANSFORMADA COSENO DISCRETO – DCT

Tiene mejor compactación de energía que la DFT con pocos coeficientes transformados útil en aplicaciones de comunicación de datos. La DCT es una transformada completamente real a diferencia de la DFT que requiere números complejos. Matemáticamente para una secuencia de entrada x(n), la DCT es:

$$y(k) = w(k)\sum_{n=1}^{N} x(n)cos\left(\frac{\pi(2n-1)(k-1}{2N}\right);\ \ k = 1,2,\dots,N$$

Donde,

$$w(k) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1}{N}}, & k = 1 \\ \sqrt{\dfrac{2}{N}}, & 2 \le k \le N \end{cases}$$

La transformada Inversa coseno discreto IDCT es;

$$x(n) = \sum_{n=1}^{N} w(n)y(k)cos\left(\frac{\pi(2n-1)(k-1}{2N}\right);\ k = 1,2,\dots,N$$

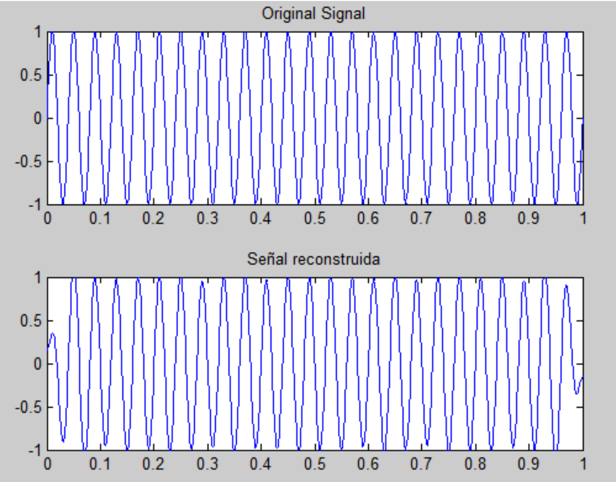
Donde,

$$w(n) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{N}}, & k = 1 \\ \sqrt{\frac{2}{N}}, & 2 \leq k \leq N \end{cases}$$

Ejemplo:

Generar una secuencia senoidal de 25 Hz con frecuencia de muestreo de 1000 Hz, calcular la DCT y reconstruir la señal usando solamente los componentes con valor mayor a 0.9 (17 coeficientes de los 1000 originales)

```
%ejemplo de dct
t = (0:1/999:1); % 1000 puntos
x = sin(2*pi*25*t);
y = dct(x);                    % calcula la dct
y2 = find(abs(y) < 0.9);
y(y2) = zeros(size(y2));
%size(y2)=983, solo se usarán 17 componentes
z = idct(y);                   % reconstruir señal
subplot(2,1,1); plot(t,x);
title('Original Signal')
subplot(2,1,2); plot(t,z), axis([0 1 -1 1])
title('Señal reconstruida')
```



TRANSFORMADA DE HILBERT

Facilita la formación de la señal analítica útil en el área de comunicaciones especialmente en el procesamiento de señales de pasa banda. Calcula la transformada de una secuencia de entrada real x(n) y retorna un resultado complejo de igual longitud.

Para aproximarse a la señal analítica, Hilbert calcula la FFT de la secuencia de entrada, remplaza los coeficientes que corresponden a las frecuencias negativas con ceros y calcula la IFFT del resultado.

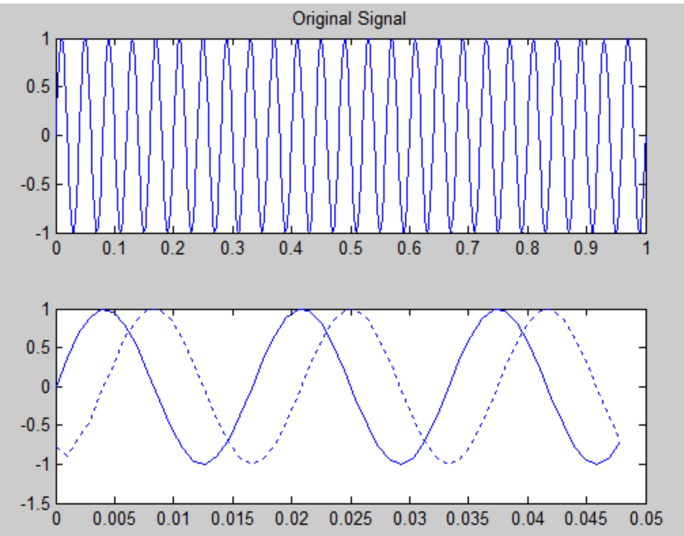
y = hilbert(x)

La parte real es el dato real y la parte imaginaria es la transformada.

```
xr = [1 2 3 4];
x = hilbert(xr)
% x =1.0000+1.0000i 2.0000-1.0000i 3.0000-1.0000i 4.0000+1.0000i
```

Ejemplo:

```
%ejemplo hilbert
t = (0:1/1023:1);
x = sin(2*pi*60*t);
y = hilbert(x);
plot(t(1:50),real(y(1:50))), hold on
plot(t(1:50),imag(y(1:50)),':'), hold off
```



La transformada o parte imaginaria tiene un desfase de 90°

BIBLIOGRAFÍA

1. The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing by Steven W. Smith, Ph.D
2. Fundamentals of digital signal processing. Lonnie c. Ludeman
3. Digital Filters with MATLAB Ricardo A. Losada
4. Proakis, J.G., and D.G. Manolakis. Digital Signal Processing: Principles, Algorithms, and Applications. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1996.
5. Oppenheim, A.V., and R.W. Schafer. Discrete-Time Signal Processing. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1989.
6. Parks, T.W., and C.S. Burrus. Digital Filter Design. New York: John Wiley & Sons, 1987.