PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES

PROFESOR: ING. JORGE A. POLANÍA P.

4.1 FILTROS ANÁLOGOS

1. INTRODUCCIÓN

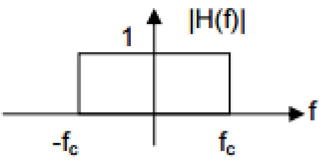
En ocasiones, las señales de interés están mezcladas con otras señales y no es posible distinguirlas o separarlas por medio de análisis basados en técnicas temporales. La separación de señales atendiendo a su distribución frecuencial es una técnica muy común en procesamiento de señales. La técnica consiste en cancelar o atenuar unas zonas frecuenciales determinadas donde la señal deseada no existe y dejar pasar aquellas frecuencias en que la señal deseada tiene su contenido frecuencial. Esta técnica es utilizada en aplicaciones tan diversas como, mejorar la calidad de señales ruidosas eliminando el ruido que esté dentro de la banda frecuencial de interés, multiplexado en frecuencia en sistemas de comunicación (radio, TV) transmitiendo en distintos canales por el mismo medio de comunicación y cada canal ocupa una banda de frecuencias distinta a las demás, etc.

La teoría clásica de diseño de filtros en el dominio de la frecuencia tiene como objetivo diseñar filtros cuya transformada de Laplace pueda expresarse por medio de una función racional polinómica de forma que se asegure su realización como filtros reales, causales y estables. Tradicionalmente, hay cuatro tipos de filtros que se utilizan en el diseño: Butterworth, Chebyshev, Inverso de Chebyshev y Elíptico.

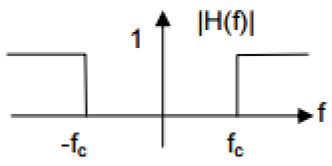
Filtros ideales

Un filtro con h(t) real es ideal si: $|H(f)|=1$ en la banda de paso $|H(f)|=0$ en la banda atenuada $\Phi H(f)= -2\pi\alpha f$ en la banda de paso

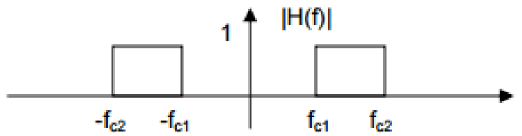
Los filtros típicos con los que trabajaremos son: Paso bajo, Paso alto, Paso banda, Banda rechazo. Un filtro muy especial es el filtro pasa todo.



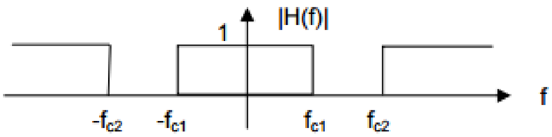
Paso bajo



Paso alto



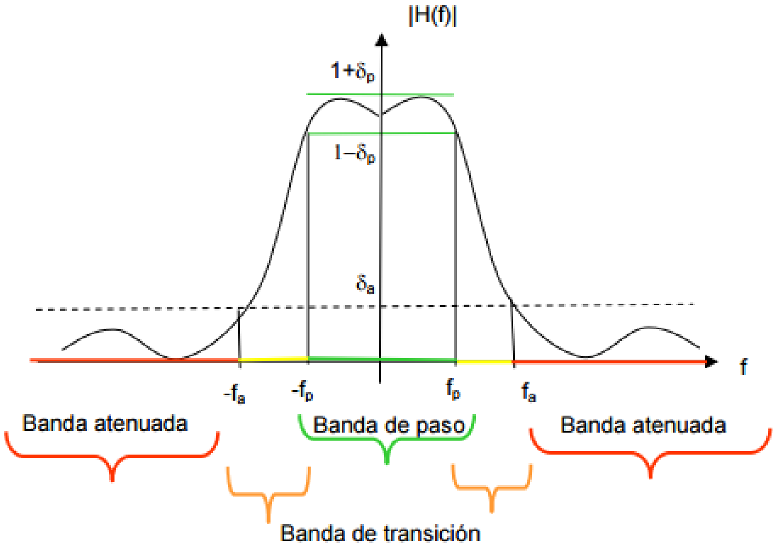
Paso banda



Banda eliminada

Tolerancias

Banda de paso	$1-\delta_p < \lvert H(f)\rvert \leq 1+\delta_p$	$0 \leq \lvert f\rvert \leq \lvert f_p\rvert$
Banda atenuada	$0 \leq \lvert H(f)\rvert \leq \delta a$	$\lvert f\rvert \geq f_a$
Banda de transición		$f_p < \lvert f\rvert < f_a$



Atenuación

$$\alpha(f) = 10 \log \frac{H_{max}^2}{|H(f)|^2}$$

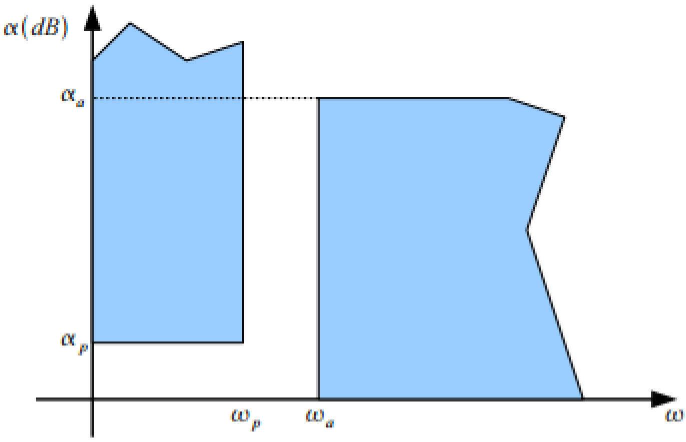
2. FUNCIONES DE APROXIMACIÓN

El problema matemático inherente al diseño del filtro en el dominio de la frecuencia es la aproximación de la respuesta deseada Hd(w) a la respuesta actual H(w). Esto se hace minimizando el error entre Hd(w) y H(w). Se tienen los siguientes algoritmos de aproximación.

I. Aproximación máximamente plana. Filtros de Butterworth.

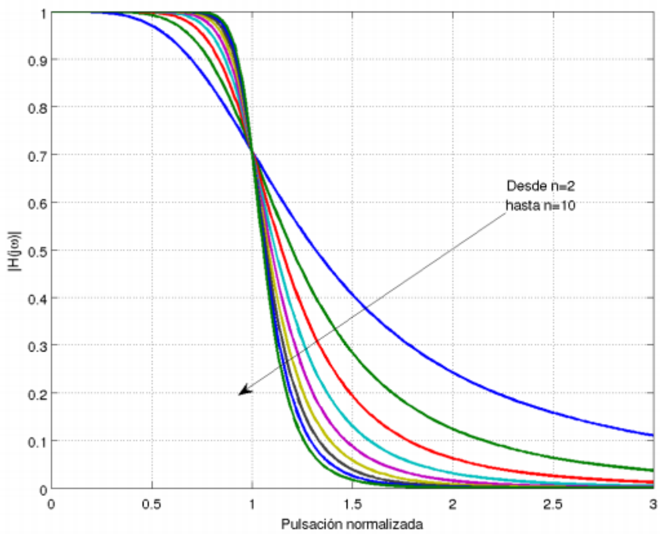
Una de las aproximaciones, más simples, conocidas y empleadas es la del ingeniero británico S. Butterworth en 1930, que propone que la característica de aproximación máximamente plana tiene una curva de respuesta lo más plana posible en el origen, es decir para la pulsación ω= 0.

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2\omega^{2n}} = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}$$



$$n = \frac{\log\left(\frac{10^{\alpha_a/10}-1}{10^{\alpha_p/10}-1}\right)}{2\cdot\log\left(\frac{\omega_a}{\omega_p}\right)} \qquad \omega_c = \frac{\omega_p}{\sqrt[2n]{10^{\alpha_p/10}-1}}$$

n: es el orden del filtro y w_c : es la frecuencia de corte



Respuestas en amplitud de distintas aproximaciones de Butterworth.

Ejemplo:

Encontrar el grado de una función paso-bajo máximamente plana que satisfaga las siguientes características:

Banda de paso w_p =1.2kHz, con α_p =0.5dB de atenuación máxima.

La banda atenuada w_a = 1.92 kHz, con α_a = 23 dB de atenuación mínima.

Solución:

Si sustituimos en la ecuación anterior los datos proporcionados en el enunciado y efectuamos las operaciones nos quedará: n = 7.87 por lo que el filtro requerido será de orden 8.

Características de los filtros de Butterworth.

Una vez que ya sabemos cómo calcular la función de transferencia de este tipo de filtros vamos a ver algunas de sus características:

- La principal de ellas la hemos fijado nosotros y es el hecho de que la función de módulo (o atenuación) es máximamente plana en el origen.
- Si observamos la forma de la función de transferencia veremos que sólo tiene polos y que todos los ceros están situados en el infinito.
- $|H(w=0)|$ = 1 independiente del orden y $|H(w=w_c)|$ =0.707

  20log $|H(w)|$ =- 3dB) independiente del orden. $|H(w=w_c)|^2$ = 0.5

- Comparada con el resto de funciones de aproximación de amplitud, las funciones de Butterworth presentan el orden más elevado en igualdad de condiciones impuestas.

Función de transferencia.

$$|H(jw)|^2 = H(jw)H(-jw) = \frac{1}{1+w^{2n}}, \quad w_c \ normalizado \ a \ 1$$

$$como \ \ s = jw, \Rightarrow H(s)H(-s) = \frac{1}{1+\left(\frac{s}{j}\right)^{2n}}$$

$$1+\left(\frac{s}{j}\right)^{2n} = 0 \quad Polos \ del \ filtro$$

Ejemplo

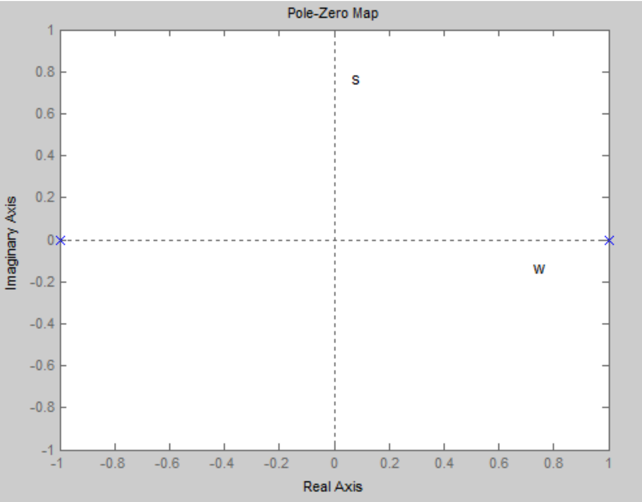
Encontrar la función de transferencia de un filtro Butterworth normalizado de orden=1

Solución

n=1,   reemplazando

$$1 + \left(\frac{s}{j}\right)^2 = 0 \quad \Rightarrow 1 - s^2 = 0, \;\; o \;\; s^2 - 1 = 0$$

$$Polos \;\; s1 = 1, \quad s2 = -1$$



$$Para\ que\ el\ filtro\ sea\ estable,$$

$$s2 = -1 \quad \Rightarrow H_1(s) = \frac{1}{s+1}$$

Ejemplo

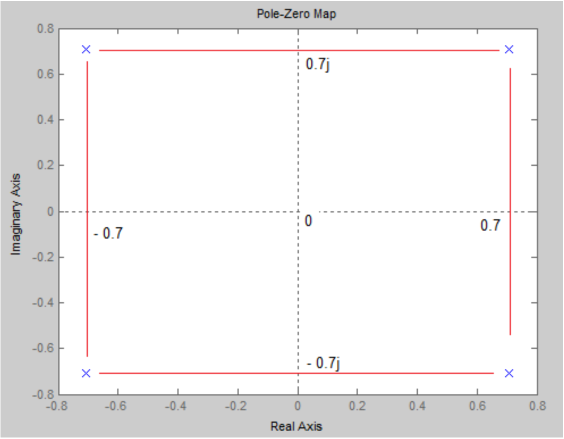
Encontrar la función de transferencia de un filtro Butterworth normalizado de orden=2

Solución

n=2,   reemplazando

$$1 + \left(\frac{s}{j}\right)^4 = 0 \quad \Rightarrow 1 + s^4 = 0,$$

$$Polos = \begin{cases} -0.7 + 0.7i \\ -0.7 - 0.7i \\ 0.7 + 0.7i \\ 0.7 - 0.7i \end{cases}$$



Para que el filtro sea estable:

$$H(s) = \frac{1}{(s+0.7-0.7i)(s+0.7+0.7i)} = \frac{1}{s^2+1.4s+1}$$

En general,

$$H(s) = \frac{1}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + 1}$$

II. Aproximación con rizado constante en la banda de paso (Chebyshev).

En la aproximación máximamente plana todo polos, hemos concentrado toda la fuerza de la aproximación en el origen (ω = 0) y aceptamos un crecimiento monótono del error para w→wp. Parecería más eficaz distribuir el error uniformemente a lo largo de la banda de paso encontrando una función:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 C_n^2\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)}$$

La función oscila uniformemente entre (ε es el rizado),

$$1 \text{ y } \frac{1}{1+\varepsilon^2}.$$

Polinomios de Chebyshev,

$$C_n(\omega) = \cos\left[n \arccos(\omega)\right]$$

$C_0(\omega) = 1$

$C_1(\omega) = \omega$

$C_2(\omega) = 2\omega^2 - 1$

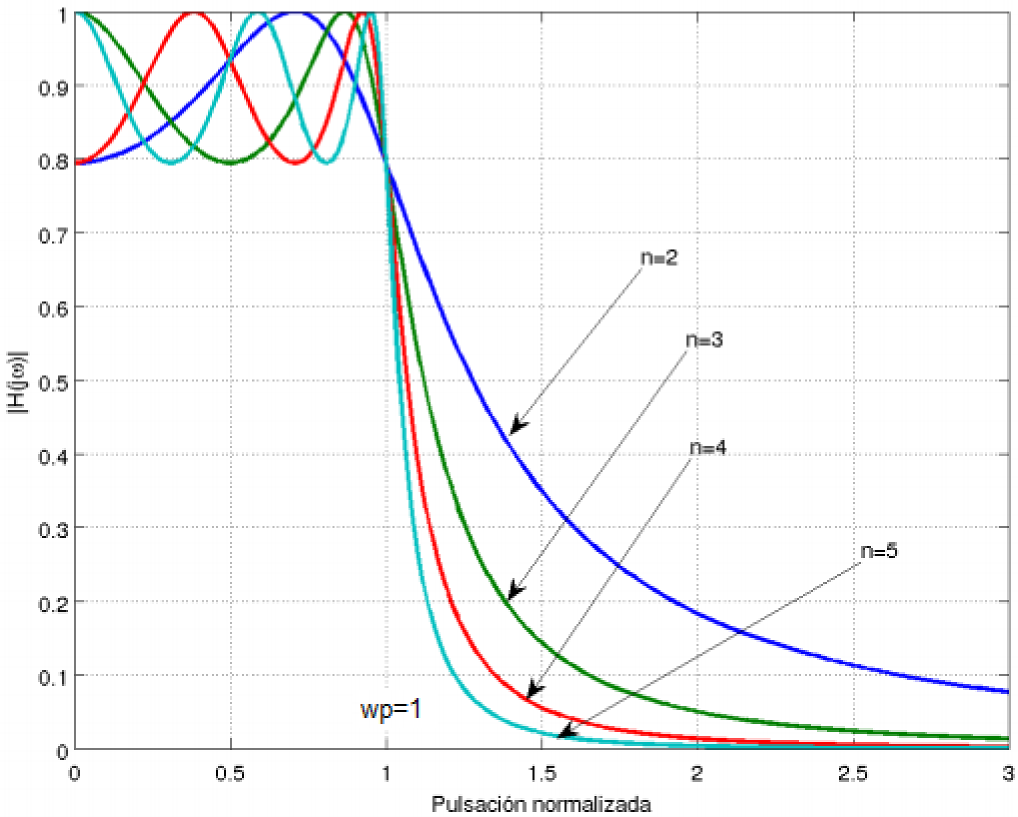
$C_3(\omega) = 4\omega^3 - 3\omega$

$C_{n+1}(\omega) = 2\omega C_n(\omega) - C_{n-1}(\omega)$

a) Características de los filtros de Chebyshev Directo (Tipo I).

Estos filtros, nombrados en honor al matemático ruso Pafnuti Chebyshev (1821-1894), debido a que la función matemática de su respuesta en frecuencia utiliza los denominados polinomios de Chebyshev. Los polinomios de Chebyshev (Cn(ω)) son los que dan las características propias de la respuesta en amplitud para este tipo de filtros. Dichas características se resumen a continuación:

- H(ω) oscila con rizado constante en la banda de paso 0≤|w|≤wp . Además, Hω) decrece monótonamente a cero para |w|>wp .
- H(0) = 1 sólo para n impar pero $H(0) = {}^{1}/_{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$ para n par. Cuando se habla de atenuación, entonces α(0) = 0 para n impar y α(0) = α_p para n par.
- │H (wp)│= ${}^{1}/_{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$ para todo n. En el caso de la atenuación eso significa que $\alpha(w_p) = \alpha_p$.
- El orden del filtro se puede obtener de la gráfica de atenuación o amplitud sin más que contar el número de máximos y mínimos en la banda de paso.



Calculo del orden y de ε.

Los parámetros utilizados en el diseño de filtros de Chebyshev son el rizado (ε) y el valor de la atenuación (α_a) a la pulsación de corte de la banda atenuada (ω_a).

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0.1\alpha_p} - 1} \qquad n = \frac{\operatorname{arccosh}\left(\sqrt{\left(10^{0.1\alpha_a} - 1\right)/\varepsilon^2}\right)}{\operatorname{arccosh}\left(\frac{\omega_a}{\omega_p}\right)}$$

Ejemplo:

Encontrar la función de transferencia de un filtro de Chebyshev paso-bajo que satisfaga las siguientes especificaciones:

Banda de paso w_p = 1.2 khz, con α_p =0.5 dB de atenuación máxima.

La banda atenuada w_a = 1.92 khz, con α_a = 23 dB de atenuación mínima.

Solución:

Calculamos en primer lugar el valor de ε y posteriormente aplicamos la ecuación del orden:

$$\varepsilon=\sqrt{10^{0,1\alpha_p}-1}=\sqrt{10^{0,1\cdot 0,5}-1}=0,3493$$

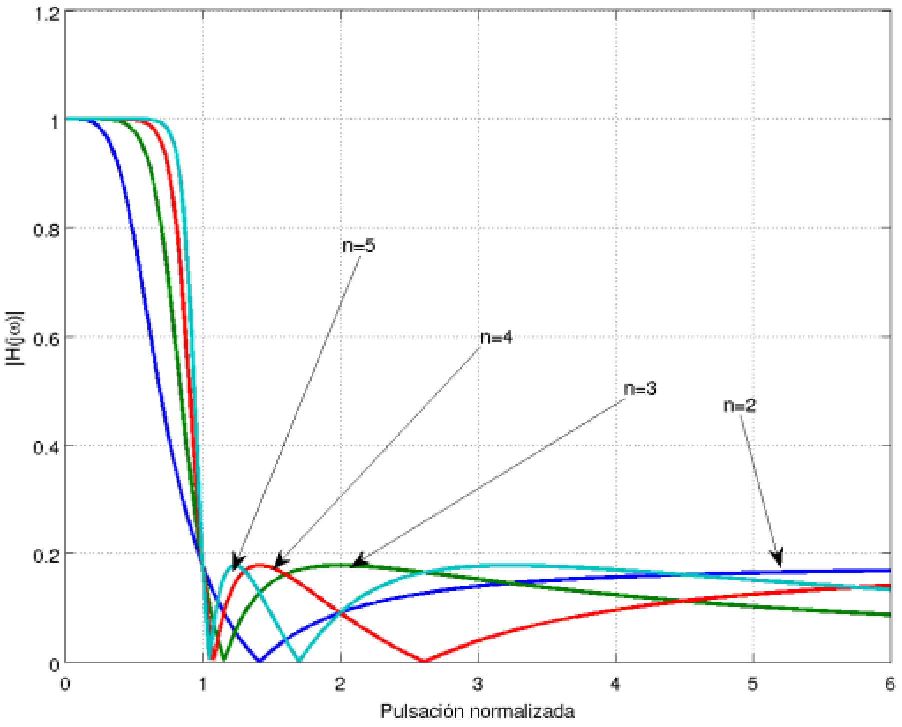
$$n=\frac{\operatorname{arccosh}\left(\sqrt{\left(10^{0,1\alpha_a}-1\right)/\varepsilon^2}\right)}{\operatorname{arccosh}\left(\frac{\omega_a}{\omega_p}\right)}=\frac{\operatorname{arccosh}\left(\sqrt{\left(10^{2,3}-1\right)/\varepsilon^2}\right)}{\operatorname{arccosh}\left(\frac{1,92}{1,2}\right)}=4,193$$

El orden del filtro es de 5.

b) Aproximación con rizado en la banda rechazo (Chebychev inverso-Tipo II).

Se ha visto que en una aproximación *máximamente plana* la atenuación crece monótonamente con el aumento de la frecuencia, y que una aproximación de Chebyshev tiene un rizado constante en la banda de paso y un incremento monótono de la atenuación en la banda atenuada. Si, en cambio se quiere que sea monótono en la banda de paso y rizado constante en la banda atenuada, utilizaremos el llamado filtro de Chebyshev inverso o Tipo II, cuya función de transferencia se expresa:

$$|H(j\omega)|^2=\frac{\varepsilon^2 C_n^2\left(\omega_a/\omega\right)}{1+\varepsilon^2 C_n^2\left(\omega_a/\omega\right)}$$



III. Filtros elípticos o de Cauer.

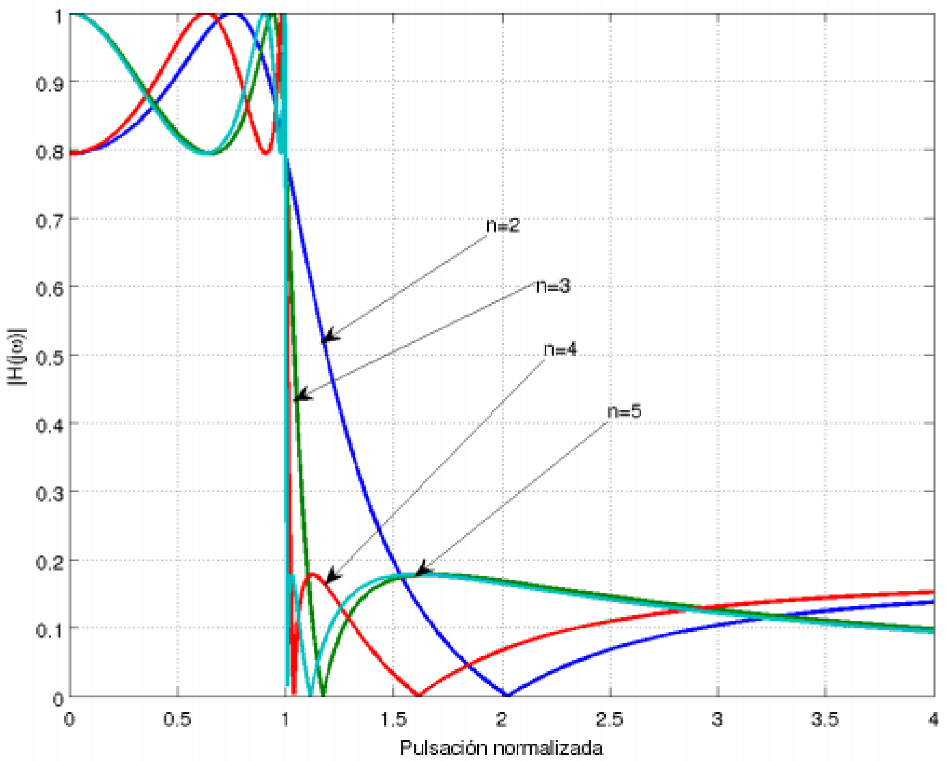
Su nombre se debe al matemático alemán *Wilhelm Cauer*, una de las personas que más ha contribuido al desarrollo de la teoría de redes y diseño de filtros. El diseño fue publicado en 1958, 13 años después de su muerte.

Se ha visto anteriormente, que la aproximación era más efectiva, es decir, de menor orden, si el error aceptable es distribuido de modo que el rizado sea constante en la banda de paso o en la banda atenuada. Por la misma razón un resultado más eficiente puede ser obtenido si distribuimos también el error entre la banda de paso y la banda atenuada. La función que cumpla esos requisitos tendrá la forma:

$$|H(jw)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 G_n^2(w)},$$

$$donde\ G\ es\ la\ magnitud\ permitida\ en\ la\ banda\ de\ paso$$

$$n = \frac{KK_1'}{K'K_1}, \quad K = \boldsymbol{\mu}(\pi/2, k) = \int_0^{\pi/2} \frac{dy}{\sqrt{1-k^2 sen^2(y)}} \quad Integral\ elíptica$$



Ejemplo:

Encontrar el orden mínimo de un filtro elíptico que cumpla las especificaciones dadas en los ejemplos realizados para Butterworth y Chebyshev.

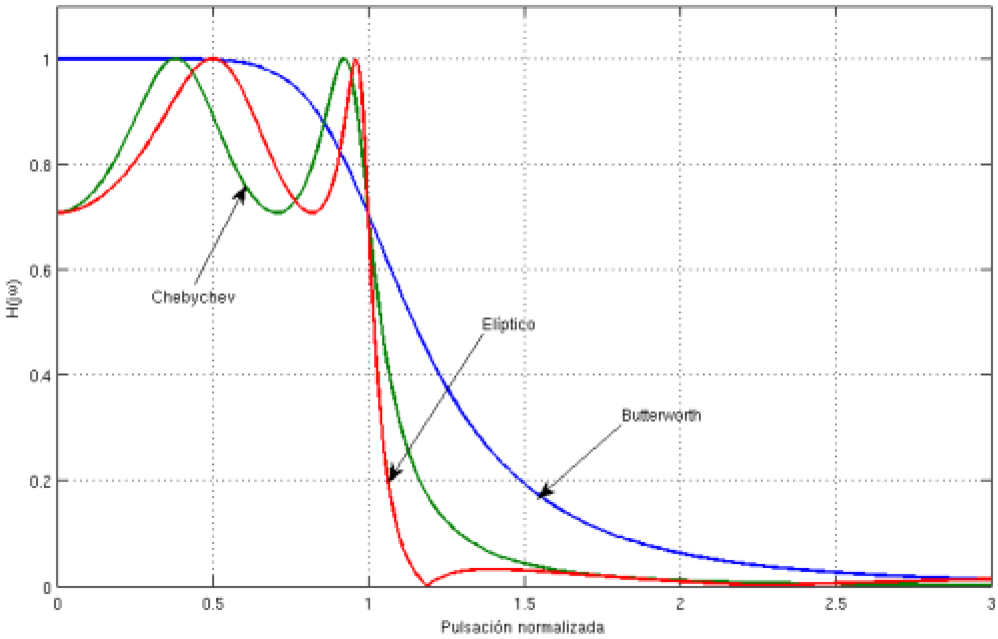
Solución:

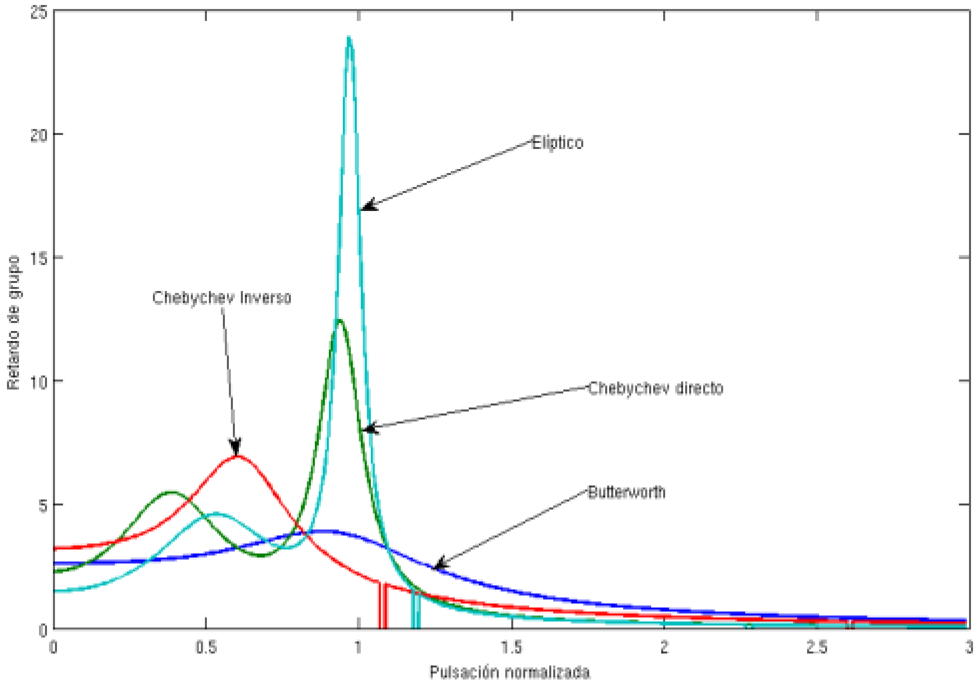
De los ejemplos anteriores sabemos que $\omega a/\omega p = 1.6$, $\alpha p = 0.5$ dB y $\alpha a = 23$ dB. Con dichos valores y usando la función *ellipord* en Matlab se obtiene un orden n = 3

MATLAB:

```
Wp=1200,  Ws=1920
Rp=0.5,  Rs=23,
[n,Wp]=ellipord(Wp,Ws,Rp,Rs,'s')
[b,a]=ellip(n,Rp,Rs,wp, 's')
freqs(b,a)
```

Comparación de filtros de Butterworth, Chebyshev y elíptico de orden 4.





3. FILTROS ANÁLOGOS USANDO MATLAB

a) Butterworth

Filtro pasa-bajo:

[n,wn] = buttord(wp,ws,Rp,Rs,'s')

n: orden del filtro
wn: frecuencia de corte
wp: frecuencia de banda de paso
ws: frecuencia en banda stop
Rp: atenuación en la banda de paso (riple o rizado)
Rs: atenuación en la banda stop (riple o rizado)

Ejemplo

Diseñar un filtro pasa bajo con menos de 3 dB en la banda de paso definida de 0 a 40 Hz y al menos 60 dB de atenuación en la banda de rechazo o stop para frecuencias mayores a 150 Hz.

[n,wn]=buttord(40,150,3,60,'s')   % n=6, wn=47.43

Coeficientes del filtro:

[b,a]=butter(n,wn,’s’)   % b coeficientes del numerador, a del denominador

Función de transferencia:

Hs=tf(b,a)

Polos y ceros:

[z,p,k]=butter(n,wn,’s’)

Respuesta en frecuencia del filtro:

freqs(b,a)

Otros tipos de filtros:

[b,a]=butter(n,wn,'Tipo','s')

Tipo= low, high, stop, bandpass

En el caso de filtros stop o bandpass (pasa banda), wn=[w1 w2] que corresponde al intervalo de frecuencias.

b) Chebyshev

Para obtener el orden del filtro:

[n,wn]=cheb1ord(wp,ws,Rp,Rs, 's')   %Tipo I

[n,wn]=cheb2ord(wp,ws,Rp,Rs, 's')   %Tipo II

Obtener los coeficientes:

```
[b,a]=cheby1(n,Rp,wp, 'Tipo','s')   %Tipo I

[b,a]=cheby2(n,Rs,ws, 'Tipo','s')   %Tipo II
```

Respuesta en frecuencia:

```
w=logspace(0,3)     % de 0 a 1000

freqs(b,a)
```

c) Elíptico

```
[n,wp]=ellipord(wp,ws,Rp,Rs, 's')

[b,a]=ellip(n,Rp,Rs,wp, 'Tipo','s')
```

BIBLIOGRAFÍA

Ludeman Lonnie. Fundamentals of digital signal processing. Harper&Row, Publishers

Burrus, Oppenheim, Schafer. Tratamiento de la señal utilizando Matlab. Prentice Hall

Mathworks Matlab. Signal processing Toolbox.

Universidad de Alcalá. Funciones de aproximación de filtros.