

CÁLCULO CON SCILAB

PROFESOR: JORGE A. POLANÍA P.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	3
1. LÍMITES.....	3
1.1 LÍMITE DE UNA CONSTANTE	3
1.2 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN.....	3
2. DERIVADAS	5
2.1 DERIVADA DE UNA CONSTANTE	5
2.2 DERIVADA DE UNA POTENCIA	5
2.3 DERIVADA DE UN PRODUCTO	6
2.4 DERIVADA DE UN COCIENTE	7
2.5 DERIVACIÓN EN CADENA	9
2.6 PENDIENTE DE UNA FUNCIÓN	10
2.7 DERIVACIÓN IMPLÍCITA	12
2.8 PUNTOS CRÍTICOS DE UNA FUNCIÓN	13
2.9 MÁXIMO, MÍNIMO E INFLEXIÓN	13
2.10 FUNCIONES LOGARÍTMICAS Y EXPONENCIALES.....	16
2.11 FUNCIÓN EXPONENCIAL	17
3. INTEGRALES	21
3.1 INTEGRAL DEFINIDA.....	21
3.2 INTEGRAL DE UNA CONSTANTE.....	21
3.3 INTEGRAL DE UNA POTENCIA	22
4. INTEGRAL INDEFINIDA.....	24
4.1 FUNCIONES LOGARITMICAS	24
4.2 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.....	25
5. APLICACIONES DE LA INTEGRAL	27
5.1 ÁREA ENTRE DOS CURVAS.....	27
5.2 SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN.....	29
5.3 LONGITUD DE ARCO	30
5.4 SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN	32

INTRODUCCIÓN

Este curso de cálculo contiene las unidades referentes a límites, derivadas, integrales y sus aplicaciones. Los ejemplos tratados se han realizado teóricamente pero también se han desarrollado o simulado con el programa SCILAB que es un software libre que los interesados pueden descargarlo de www.scilab.com/download.

1. LÍMITES

El límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a a es L , quiere decir que cuando x se acerca suficientemente a a , $f(x)$ se acerca arbitrariamente a L . Se escribe de la forma:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

1.1 LÍMITE DE UNA CONSTANTE

El límite de una constante es igual a la constante,

$$\lim_{x \rightarrow a} c = c$$

Ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 3} 8 = 8$$

1.2 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Si $f(x)$ es un polinomio y a es un número real, entonces,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Ejemplos:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^3 + 2x^2 - 3x + 5}{2x - 3} = \frac{3(2^3) + 2(2^2) - 3(2) + 5}{2(2) - 3} = \frac{3(8) + 2(4) - 6 + 5}{4 - 3} = 31$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^{2/3} + 5\sqrt{x}}{x^2 - 2} = \frac{5^{2/3} + 5\sqrt{5}}{5^2 - 2} = \frac{2.9 + 11.2}{23} = 0.61$$

TEOREMA

El límite de una función cuya variable tiende al infinito se calcula dividiendo cada uno de los términos por el elemento de mayor exponente. Recordar que:

$$\frac{1}{\infty} = 0, \quad \infty^n = \infty, \quad n * \infty = \infty, \quad \frac{a}{0} = \infty$$

Ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 + 2x^2 - 3 = \infty^3 + 2(\infty)^2 - 3 = \infty$$

Ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{3}{x^2}}{\frac{x}{x^2} + \frac{2}{x^2}} = \frac{\frac{2}{1} - \frac{3}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} = \frac{\frac{2}{1} - \frac{3}{\infty}}{\frac{1}{\infty} + \frac{2}{\infty}} = \frac{2 - 0}{0 + 0} = \frac{2}{0} = \infty$$

Ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3}{x^3 + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2}{x^3} - \frac{3}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} + \frac{2}{x^3}} = \frac{\frac{2}{x} - \frac{3}{x^3}}{1 + \frac{2}{x^3}} = \frac{\frac{2}{\infty} - \frac{3}{\infty}}{1 + \frac{2}{\infty}} = \frac{0 - 0}{1 + 0} = \frac{0}{1} = 0$$

Ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3}{x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{2}{x^2}} = \frac{\frac{2}{1} - \frac{3}{\infty}}{1 + \frac{2}{\infty}} = \frac{2 - 0}{1 + 0} = \frac{2}{1} = 2$$

2. DERIVADAS

La derivada de una función $y=f(x)$ con respecto a x , es igual a la variación infinitesimal de la función con respecto a x .

Si $y=f(x)$, entonces,

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Ejemplo:

Calcular la derivada de la función $y=f(x)=x^2$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \frac{x^2 + 2x * \Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x}$$

Ejemplo:

$$\frac{2x * \Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x = 2x + 0 = 2x$$

2.1 DERIVADA DE UNA CONSTANTE

La derivada de una constante es cero. $f(x)=c$, entonces $f'(x)=0$

Ejemplo:

Hallar la derivada de $y=f(x)=5$

Si $f(x)$ es una constante entonces, $f(x+\Delta x)=f(x) = 5$, por tanto

$$f(x+\Delta x)-f(x)=0$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 0$$

2.2 DERIVADA DE UNA POTENCIA

La derivada de una potencia $f(x)=x^n$ es igual a $f'(x)=nx^{n-1}$

Ejemplo:

Hallar la derivada de $y=f(x)=x^5$

$$f'(x)=5x^{5-1} = 5x^4$$

Ejemplo:

Hallar la derivada de $f(x)=3x^4$

$$f'(x)=3(4x^{4-1})=3(4x^3)=12x^3$$

Ejemplo:

Hallar la derivada de $y =f(x)=2x^{-2}$

$$f'(x)=2(-2x^{-2-1})=2(-2x^{-3})= -4x^{-3}= -4/x^3$$

Ejemplo:

Hallar la derivada de

$$y = f(x) = \frac{3}{x^3}$$

$$f(x) = \frac{3}{x^3} = 3x^{-3}$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 3(-3x^{-3-1}) = -9x^{-4} = \frac{-9}{x^4}$$

Ejemplo:

Hallar la derivada de $y=f(x)=3x^4+5x^3-2x^2-6x+2$

$$f'(x)=3(4x^3)+5(3x^2)-2(2x)-6+0 = 12x^3+15x^2-4x-6$$

2.3 DERIVADA DE UN PRODUCTO

La derivada de un producto de funciones $f(x) \cdot g(x)$ es igual a la derivada del primero $f'(x)$ por el segundo $g(x)$ más el primero $f(x)$ por la derivada del segundo $g'(x)$

$$\frac{d}{dx} [f(x) \cdot g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Ejemplo:

$$y = (2x^2 - 3x)(x^3 - 2x^2 + 3)$$

$$f(x) = 2x^2 - 3x, \text{ entonces, } f'(x) = 4x - 3$$

$$g(x) = x^3 - 2x^2 + 3, \text{ entonces, } g'(x) = 3x^2 - 4x + 0 = 3x^2 - 4x$$

$$y' = (4x - 3)(x^3 - 2x^2 + 3) + (2x^2 - 3x)(3x^2 - 4x)$$

Simplificando:

$$y' = 10x^4 - 28x^3 + 18x^2 + 12x - 9$$

2.4 DERIVADA DE UN COCIENTE

La derivada de un cociente $f(x)/g(x)$ es igual a:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Ejemplo:

$$y = \frac{2x^3 + 2x}{3x^2 - 2}$$

$$f(x) = 2x^3 + 2x, \text{ entonces, } f'(x) = 6x^2 + 2$$

$$g(x) = 3x^2 - 2, \text{ entonces, } g'(x) = 6x$$

$$y' = \frac{(6x^2 + 2)(3x^2 - 2) - (2x^3 + 2x)(6x)}{[3x^2 - 2]^2}$$

Simplificando:

$$y' = \frac{6x^4 - 18x^2 - 4}{9x^4 - 12x^2 + 4}$$

APLICANDO SCILAB:

//variable simbólica x

x=poly (0,'x')

// Ejemplo

y=x^5;

derivat (y)

//y'=5x^4

// Ejemplo

y=3*x^4

derivat (y)

//y'=12x^3

// Ejemplo

y=2*x^-2;

D=derivat (y)

simp (D)

//D=-4/x^3

// Ejemplo

y=3/x^3;

D=derivat (y)

simp (D)

//D=-9/x^4

// Ejemplo

y=3*x^4+5*x^3-2*x^2-6*x+2;

D=derivat (y)

simp (D)

//y'=-6-4x+15x^2+12x^3

// Ejemplo

y = (2*x^2-3*x)*(x^3-2*x^2+3);

D= derivat (y)

simp (D)

//y'=-9+12x+18x^2-28x^3+10x^4

// Ejemplo

y= (2*x^3+2*x)/(3*x^2-2);

D=derivat (y)

simp(D)

//y'=(-4-18x^2+6x^4) / (4-12x^2+9x^4)

2.5 DERIVACIÓN EN CADENA

Si $y=f(u)$, $u=g(x)$, entonces, la derivada de y con respecto a x es igual a:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Ejemplo:

Hallar la derivada de $y = (x^3 - 2x^2 - 4)^4$

Si $u = x^3 - 2x^2 - 4$, entonces, $y = f(u) = u^4$

$$\text{si } \frac{du}{dx} = 3x^2 - 4x, \quad \text{entonces,}$$

$$\frac{dy}{du} = 4u^3, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = 4(x^3 - 2x^2 - 4)^3(3x^2 - 4x)$$

APLICANDO SCILAB,

`x=poly (0,'x')`

`y=(x^3 - 2*x^2 - 4) ^4;`

`D=derivat (y)`

`simp(D)`

2.6 PENDIENTE DE UNA FUNCIÓN

La **pendiente** de una función en un punto es la derivada en ese punto.

Ejemplo:

Hallar la pendiente de la función $y=2x^2$ en el punto $x=3$. Hacer las gráficas.

Para $x=3$, se tiene, $y=2(3)^2 = 18$, el punto es **P (3,18)**

La pendiente es $m = y' = 4x = 4(3)=12$, **m = 12**

Gráficamente la pendiente es la tangente de la recta que pasa por ese punto, su función o ecuación de la pendiente, se obtiene así:

$y - y_1 = m (x - x_1)$, donde $x_1=3$, $y_1=18$

$y - 18 = 12(x - 3)$, entonces, $y = 12x - 36 + 18$, La ecuación de la tangente es,

$$y = 12x - 18$$

// POR SCILAB,

// cálculo de la pendiente en $x=3$

```
function y=f(x)
```

```
y=2*x^2;
```

```
endfunction
```

```
x=3;
```

```
derivative (f,x)
```

//Respuesta: $m=12$

// Gráfica de la parábola $y=2x^2$ y de la recta $y_1=12x-18$

```
x= [-5:0.1:5];
```

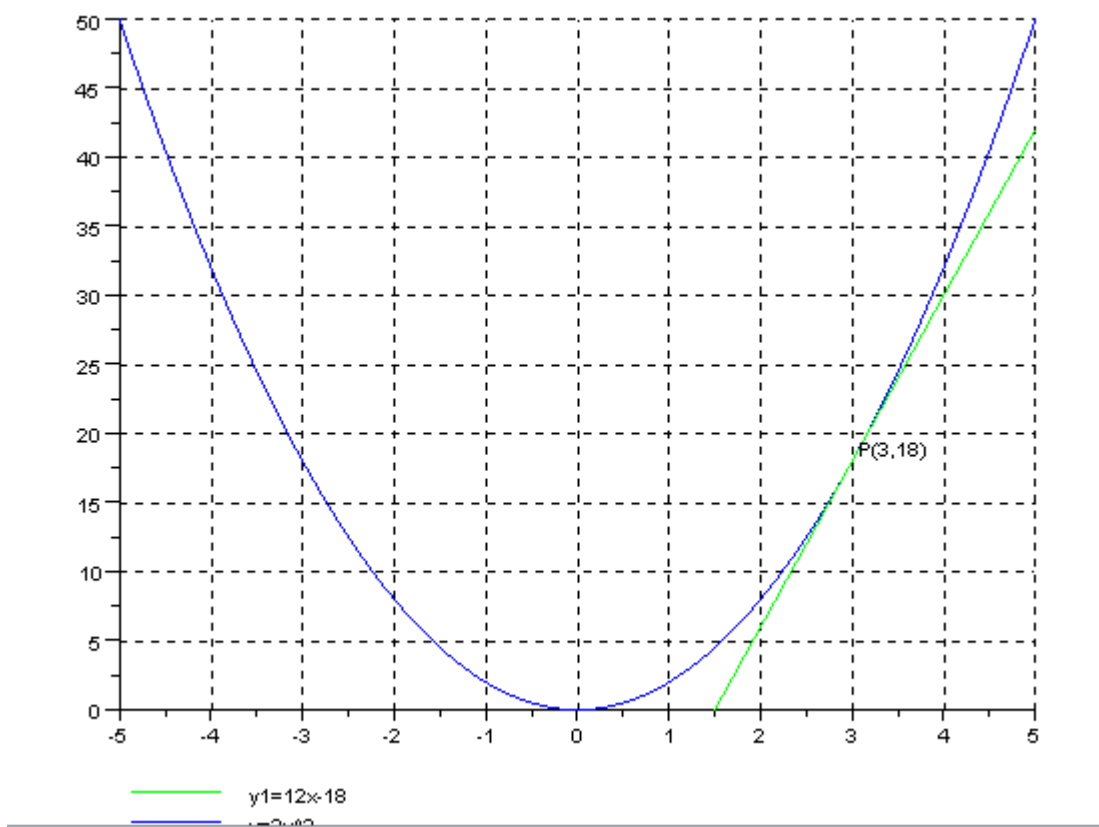
```
y=2*x^2;
```

```
y1=12*x-18;
```

```
plot2d(x, [y' y1'],[2,3], leg="y1=12x-18@y=2x^2",rect=[-5 0 5 50])
```

```
xgrid
```

```
xstring (3,18,["P(3,18)"])
```



2.7 DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Una función es implícita cuando para encontrar su $y = f(x)$ se tiene que despejar de la ecuación, por ejemplo:

$2x^2 - 3y = 4$ es una función implícita. Su valor es igual a

$2x^2 - 4 = 3y$, o sea, $y = f(x) = (1/3)(2x^2 - 4)$

Ejemplo:

Para la siguiente ecuación: $y^3 - 2y^2 + 4x = x^2 - 2$, hallar la derivada $y' = f'(x)$

Derivando la expresión, se tiene,

$3y^2 y' - 4y y' + 4 = 2x - 0$, factorizando y'

$y'(3y^2 - 4y) = 2x - 4$, despejando

$$y' = \frac{2x - 4}{3y^2 - 4y}$$

2.8 PUNTOS CRÍTICOS DE UNA FUNCIÓN

Para encontrar los puntos críticos de una función $f(x)$ se realiza su correspondiente derivación $f'(x)$ y se iguala a cero. Los valores de x que cumplen con esta solución son los puntos críticos.

Ejemplo:

Encontrar los puntos críticos de la función, $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 12$,

Derivando la función,

$$f'(x) = -4x^3 + 4x, \text{ igualando a cero, } -4x^3 + 4x = 0,$$

Factorizando, $-4x(x^2 - 1) = 0$, los valores para los cuales se cumple, son

$$x = 0, \quad x = 1, \quad x = -1 \text{ (puntos críticos)}$$

Estos son los puntos críticos, que tienen su derivada igual a cero, o sea, su pendiente = 0 (recta horizontal en el punto)

2.9 MÁXIMO, MÍNIMO E INFLEXIÓN

Un punto crítico puede ser un valor máximo de la función, un valor mínimo o ni lo uno ni lo otro que se conoce como punto de inflexión.

Resolver este problema implica calcular la segunda derivada de la función, esto es, la derivada de la primera derivada y considerar lo siguiente:

Si $f''(x) > 0$ estamos en un punto mínimo

Si $f''(x) < 0$ estamos en un punto máximo y

Si $f''(x) = 0$ es un punto de inflexión

Ejemplo:

Para el ejemplo anterior definir los puntos críticos,

Primera derivada: $f'(x) = -4x^3 + 4x$

Segunda derivada $f''(x) = -12x^2 + 4$

Reemplazando los valores en los puntos críticos ($x=0$, $x=1$, $x=-1$),

Para $x = 0$, $f''(0) = -12(0)^2 + 4 = 4 > 0$, es un punto mínimo

Para $x = 1$, $f''(1) = -12(1)^2 + 4 = -8 < 0$, es un punto máximo

Para $x = -1$, $f''(-1) = -12(-1)^2 + 4 = -8 < 0$, es un punto máximo

// PROGRAMA EN SCILAB:

// Cálculo de máximo y mínimos

// Variable simbólica x

$x = \text{poly}(0, 'x')$

$fx = -x^4 + 2x^2 + 12$;

// Primera derivada

$df = \text{derivat}(fx)$

// $df = -4x^3 + 4x$

// Cálculo de puntos críticos

$p = [-4 \ 0 \ 4 \ 0]$;

$r = \text{roots}(p)$

// puntos críticos = 0 -1 1

// cálculo de la segunda derivada

$d2f = \text{derivat}(df)$

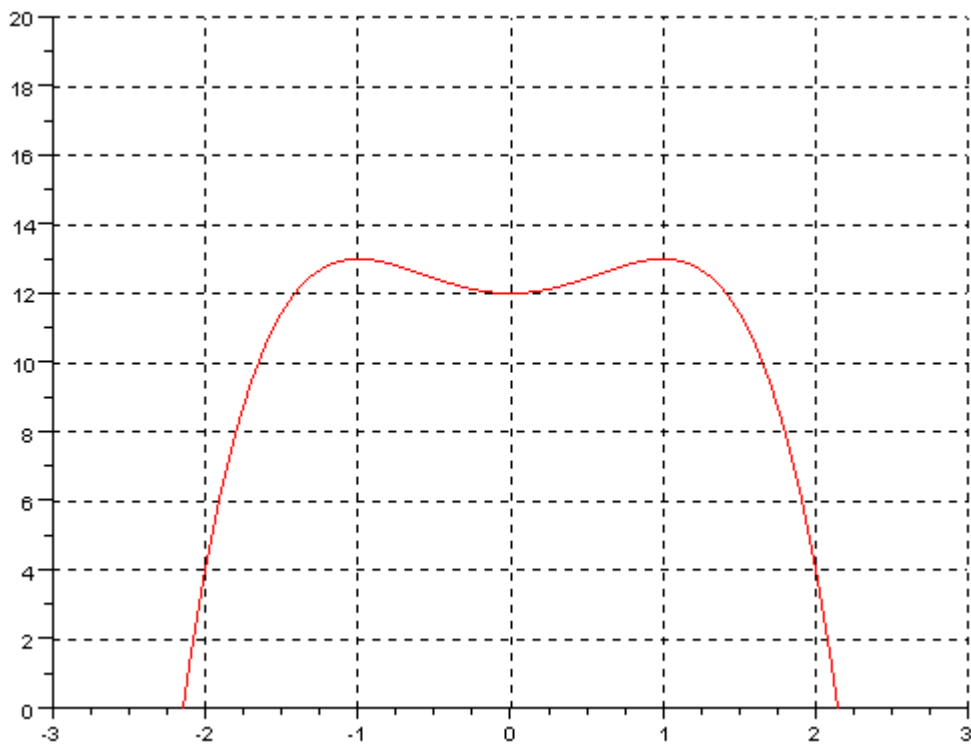
// $d2f = -12x^2 + 4$

// cálculos de $d2y$ en los puntos críticos

```

x=0;
d2f0= -12*x^2+4
x=1;
d2f1=-12*x^2+4
x=-1;
d2fm1=-12*x^2+4
//d2f(0)=4, d2f (1)=-8, d2f (-1)=-8
//gráfica de la función
x= [-3:0.1:3];
fx=-x^4+2*x^2+12;
plot2d(x, fx', 5, rect= [-3 0 3 20])
xgrid

```



2.10 FUNCIONES LOGARÍTMICAS Y EXPONENCIALES

La derivada con respecto a x de una función logaritmo natural denotada como $f(x) = \ln(x)$, está dada por:

$$D_x(\ln x) = \frac{1}{x}$$

Si $u=g(x)$, entonces, su derivada es:

$$D_x(\ln u) = \frac{1}{u} D_x(u)$$

$D_x(u)$ es la derivada interna

Ejemplo:

Sea $f(x) = \ln(\sqrt{x^3} + 2)$ Hallar su derivada D_x

$$u = \sqrt{x^3} + 2 = x^{3/2} + 2, \text{ entonces, } D_x u = (3/2)x^{1/2} = \frac{3\sqrt{x}}{2}$$

$$D_x[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{x^3} + 2} * \frac{3\sqrt{x}}{2} = \frac{3}{2} * \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^3} + 2}$$

PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

- a) $\ln(a * b) = \ln(a) + \ln(b)$; de un producto
- b) $\ln(a / b) = \ln(a) - \ln(b)$; de un cociente
- c) $\ln(a^n) = n * \ln(a)$; de una potencia

Ejemplo:

Hallar la derivada de:

$$f(x) = \ln[(x^2 + 1)\sqrt{2x + 1}]$$

Aplicando regla a):

$$f(x) = \ln(x^2 + 1) + \ln\sqrt{2x + 1} = \ln(x^2 + 1) + \ln(2x + 1)^{1/2}$$

Aplicando regla c):

$$f(x) = \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{2}\ln(2x + 1)$$

Derivando:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}(2x) + \frac{1}{2} * \frac{1}{2x + 1} * 2 = \frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{2x + 1}$$

Ejemplo:

Hallar la derivada en $x=0.5$ de:

$$f(x) = \ln \sqrt[3]{\frac{x^2 - 1}{2x^2}}$$

Aplicando las reglas b) y c):

$$f(x) = \ln \left(\frac{x^2 - 1}{2x^2} \right)^{1/3} = (1/3)[\ln(x^2 - 1) - \ln(2x^2)]$$

Derivando:

$$f'(x) = (1/3) \left[\frac{1}{x^2 - 1}(2x) - \frac{1}{2x^2}(4x) \right] = \frac{1}{3} \left[\frac{2x}{x^2 - 1} - \frac{2}{x} \right]$$

En $x=0.5$,

$$f'(0.5) = \frac{1}{3} \left[\frac{2 * 0.5}{0.5^2 - 1} - \frac{2}{0.5} \right] = -1.777$$

2.11 FUNCIÓN EXPONENCIAL

La función exponencial es la inversa del logaritmo natural. Se nota como **exp**

$f(x) = e^x$, donde $e = 2.718281$, en Scilab se nota como %e

$$f'(x) = e^x$$

Si $u = g(x)$, entonces, $D_x e^u = e^u D_x u$, donde $D_x u$ es la derivada interna

Ejemplo:

Hallar la derivada de la función para $x=2$:

$$f(x) = e^{\sqrt{x^2-1}}$$

$$u = \sqrt{x^2 - 1} = (x^2 - 1)^{1/2}$$

La derivada interna es:

$$D_x u = (1/2)(x^2 - 1)^{-1/2}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$f'(x) = e^u D_x u = e^{\sqrt{x^2-1}} * \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{x e^{\sqrt{x^2-1}}}{\sqrt{x^2-1}}$$

Para $x=2$;

$$f'(2) = \frac{2e^{\sqrt{4-1}}}{\sqrt{4-1}} = \frac{2e^{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} = 6.53$$

APLICANDO SCILAB:

//definición de la función

```
function y=f(x)
```

```
  y=exp(sqrt(x^2-1));
```

```
endfunction
```

//cálculo de la derivada en $x=2$

```
df=derivative(f,2)
```

// df = 6.527

2.12 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Las fórmulas para el cálculo de las derivadas de las funciones trigonométricas son:

sen(x)	cos(x)	sen u	cos u D_x u
cos(x)	-sen(x)	cos u	-sen u D_x u
tan(x)	sec²(x)	tan u	sec² u D_x u
cot(x)	-csc²(x)	cot u	-csc² u D_x u
sec(x)	sec(x)tan(x)	sec u	sec u tan u D_x u
csc(x)	-csc(x)cot(x)	csc u	-csc u cot u D_x u

Ejemplo:

Hallar la derivada de la función para $x=30^\circ$

$$y = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$

Recordando la derivada de un cociente:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$f(x)=\cos(x)$, entonces, $f'(x)= -\sin(x)$

$g(x)=1+\sin x$, entonces, $g'(x)= \cos(x)$

Reemplazando:

$$y' = \frac{-\sin x (1 + \sin x) - \cos x \cos x}{(1 + \sin x)^2} = \frac{-\sin x - \sin^2 x - \cos^2 x}{(1 + \sin x)^2} = \frac{-\sin x - 1}{(1 + \sin x)^2}$$

Para $x = 30^\circ$:

$$y' = \frac{-\sin 30 - 1}{(1 + \sin 30)^2} = -0.67$$

// POR SCILAB:

//definición de la función

```
function y=f(x)
    y=cos(x)/(1+sin(x));
endfunction

//pasar ángulo a radianes
x=30*%pi/180;

//calcular la derivada
dy=derivative(f,x)

// dy = 0.667
```

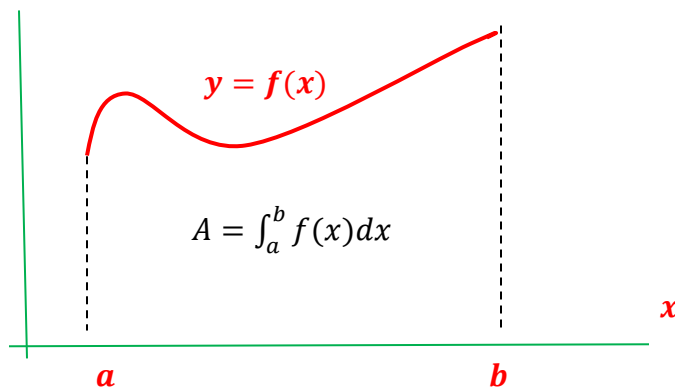
3. INTEGRALES

Es una de las herramientas más importantes del cálculo que permite calcular áreas bajo una curva, áreas que generan una curva en revolución y volúmenes de sólidos.

3.1 INTEGRAL DEFINIDA

Se define como el área bajo la curva de una función $f(x)$ en un intervalo entre dos límites $[a, b]$. Se nota de la forma:

$$A = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \text{ donde } F \text{ es la antiderivada}$$



3.2 INTEGRAL DE UNA CONSTANTE

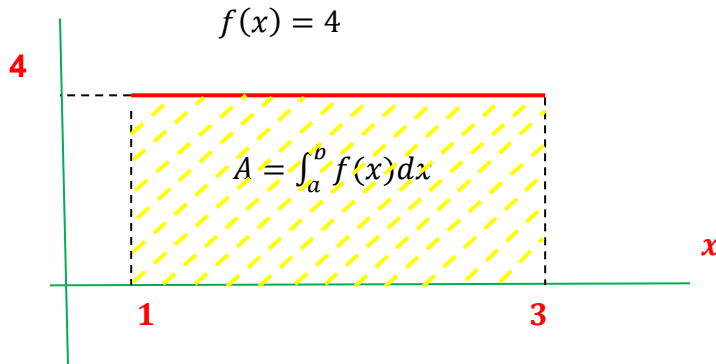
La integral de una función es la antiderivada de la función ([Teorema fundamental del Cálculo](#)). Esto quiere decir, que si $y = cx$, entonces, $y' = c$, o sea que, la antiderivada de una constante c es cx .

$$f(x) = c, \text{ entonces, } \int_a^b cdx = cx|_a^b = c(b - a)$$

Ejemplo:

$$\int_1^3 4dx = 4x|_1^3 = 4(3 - 1) = 8$$

Esto lo podemos comprobar, calculando el área bajo la curva $f(x)=4$, entre el límite inferior igual a 1 y el límite superior igual a 3.



Como se observa el área mostrada es un rectángulo de ancho igual a $2 = 3-1$ y de alto igual a 4. Su área es, $A = 2 \cdot 4 = 8$

// PRUEBA CON SCILAB:

//definición de la función

function y=f(x)

y=4

endfunction

//calcular la integral entre x=1 y x=3

intg(1,3,f)

// ans = 8

3.3 INTEGRAL DE UNA POTENCIA

Si $f(x) = x^n$, entonces:

$$f(x) = x^n, \text{ entonces, } \int_a^b x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_a^b$$

Esto es se incrementa en uno el exponente y se divide por el exponente elevado.

Prueba:

$$f(x) = y = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \text{ entonces, } y' = \frac{(n+1)x^n}{n+1} = x^n$$

Ejemplo:

Hallar la integral de la función $y = x^4$ entre $x=2$ y $x=5$

$$f(x) = y = x^4, \text{ entonces, } \int_2^5 x^4 dx = \frac{x^5}{5} \Big|_2^5 = \frac{5^5}{5} - \frac{2^5}{5} = 625 - 6.4 = 618.6$$

// CON SCILAB:

//definición de la función

function y=f(x)

y=x^4

endfunction

// calculo de la integral

intg(2,5,f)

//ans = 618.6

Ejemplo:

Hallar la integral de la función $y = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 3$ entre $x=1$ y $x=4$

$$\int_1^4 (2x^3 - 3x^2 + 5x - 3) dx = \frac{2x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 3x \Big|_1^4$$

$$= \frac{2(4)^4}{4} - \frac{3(4)^3}{3} + \frac{5(4)^2}{2} - 3(4) - \frac{2(1)^4}{4} - \frac{3(1)^3}{3} + \frac{5(1)^2}{2} - 3(1) = 93$$

PROGRAMA SCILAB:

//definición de la función

function y=f(x)

y=2*x^3-3*x^2+5*x-3

endfunction

// Cálculo de la integral

intg(1,4,f)

//ans=93

4. INTEGRAL INDEFINIDA

La integral indefinida se define como:

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \text{ donde } F \text{ es una antiderivada de } f$$

Ejemplo:

$$\int (2x^5 - 4x^3 + 3x - 5)dx = \frac{2x^6}{6} - \frac{4x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} - 5x + C$$

4.1 FUNCIONES LOGARITMICAS

La integral de una función de la forma $f(u)=1/u$ es igual a:

$$\int \frac{1}{u} du = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

Ejemplo:

Hallar la integral:

$$I = \int_1^2 \frac{2x}{4x^2 + 1} dx$$

$$u = 4x^2 + 1, \quad du = 8x, \text{ entonces, } \frac{du}{u} = \frac{8x}{4x^2 + 1}$$

$$\int_1^2 \frac{2x}{4x^2 + 1} dx = \frac{1}{4} \int_1^2 \frac{du}{u} = \frac{1}{4} \ln|4x^2 + 1| \Big|_1^2$$

$$I = \frac{1}{4} [\ln|4 * 2^2 + 1| - \ln|4 * 1^2 + 1|] = \frac{1}{4} [\ln|17| - \ln|5|] = 0.306$$

CÁLCULO POR SCILAB:

//definir función

function y=f(x)

y=2*x/(4*x^2+1);

endfunction

//calcular la integral

I=intg(1,2,f)

// I = 0.3059

4.2 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Las integrales de las funciones trigonométricas son sus correspondientes antiderivadas.

Ejemplo:

$$\int \text{sen}(3x) dx$$

$u = 3x$, entonces, $du = 3$

$$\int \operatorname{sen}(3x) dx = \frac{1}{3} \int \operatorname{sen} u \, du$$

Recordando que:

$$D_u(\cos u) = -\operatorname{sen} u, \text{ entonces, } D_u(-\cos u) = \operatorname{sen} u$$

$$\frac{1}{3} \int \operatorname{sen} u \, du = \frac{1}{3} (-\cos u) = -\frac{1}{3} \cos(3x) + C$$

Ejemplo:

Calcular la integral definida:

$$I = \int_{0.5}^{1.5} \frac{\csc^2 \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

POR SCILAB:

//definir función

function y=f(x)

 y=csc(sqrt(x))^2/sqrt(x);

endfunction

//Calcular integral

i=intg(0.5,1.5,f)

// i = 1.619

5. APLICACIONES DE LA INTEGRAL

5.1 ÁREA ENTRE DOS CURVAS

El área entre dos curvas $f(x)$ y $g(x)$ acotadas en $x=a$, $y=b$, está dada por:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

Ejemplo:

Calcular el área de la región limitada por las curvas $f(x)=x^2$ y $g(x)=\sqrt{x}$

Lo primero que se tiene que encontrar son los puntos de corte de las dos gráficas,

Igualando las ecuaciones: $x^2 = \sqrt{x}$

Elevando al cuadrado: $x^4 = x$, o sea, $x^4 - x = 0$

Factorizando: $x(x^3 - 1) = 0$, la solución es: $x = 0$ y $x = 1$

//USANDO SCILAB vamos a graficarlas,

//valores de x

```
x=[0:0.01:1.2];
```

```
f=x^2;
```

```
g=sqrt(x);
```

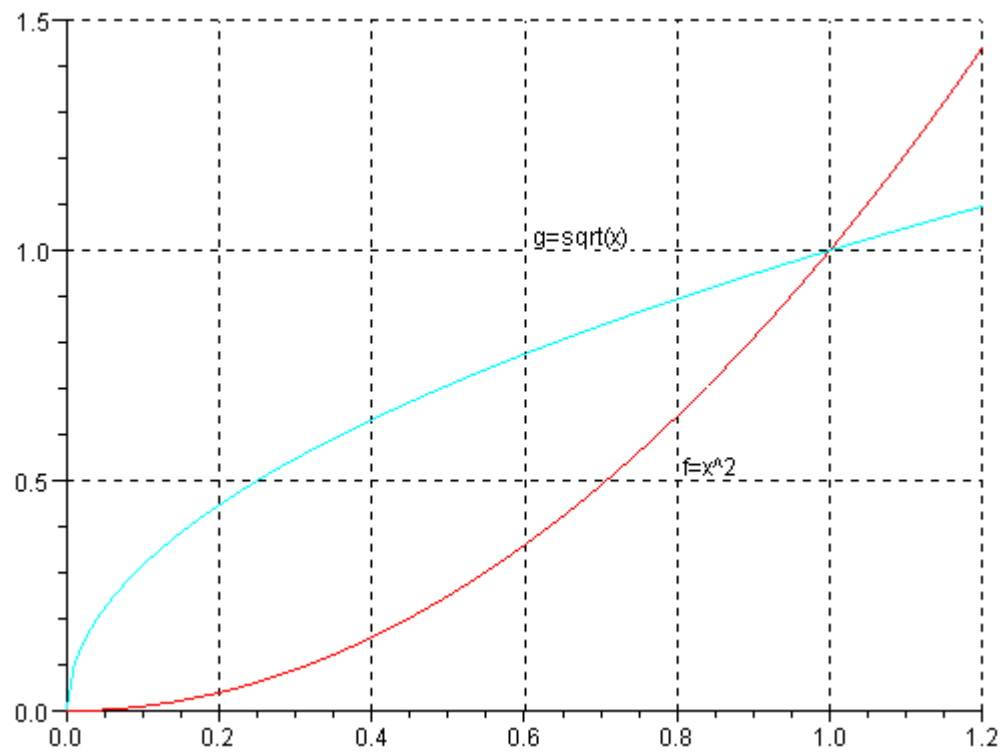
```
plot2d(x,[f'g'],[5 4])
```

```
xset("font size",2)
```

```
xstring(0.8,0.5,["f=x^2"])
```

```
xstring(0.6,1.0,["g=sqrt(x)"])
```

```
xgrid
```



Se observa que las gráficas tienen puntos de intersección en $x=0$ y $x=1$

$$A = \int_a^b [\sqrt{x} - x^2] dx$$

//cálculo del área entre las curvas

function y=f(x)

y=sqrt(x)-x^2;

endfunction

intg(0,1,f)

//ans=0.33

5.2 SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

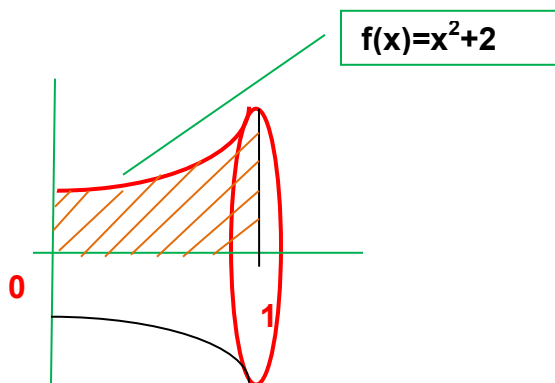
Un sólido de revolución se genera al girar un área alrededor de uno de los ejes del plano cartesiano.

Para un área limitada por $f(x)$ y el eje x entre valores de a y b , el volumen es igual a:

$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$$

Ejemplo:

Hallar el sólido generado al girar el área limitada por la curva $f(x) = x^2 + 2$ entre $x=0$ y $x=1$



$$V = \int_0^1 \pi [x^2 + 2]^2 dx = \pi \int_0^1 (x^4 + 4x^2 + 4) dx = \pi \int_0^1 \left(\frac{x^5}{5} + \frac{4x^3}{3} + 4x \right) dx$$

$$V = \pi \left(\frac{1}{5} + \frac{4}{3} + 4 \right) = 17.38$$

//POR SCILAB:

//la función es

function y=f(x)

```

y=%pi*(x^2+2)^2
endfunction
//cálculo del área
intg(0,1,f)
//ans = 17.38

```

5.3 LONGITUD DE ARCO

La longitud de arco de una curva dada por $f(x)$ entre límites a y b , está dada por:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Donde $f'(x)$ es la derivada de la función

Ejemplo:

Hallar la longitud del arco de la curva $f(x) = 2\sqrt{x} - 2$ entre $x=2$ y $x=16$

Si $f(x) = 2\sqrt{x} - 2$, o sea, $f(x) = 2x^{1/2} - 2$

$$f'(x) = 2 \left(\frac{1}{2} \right) x^{-1/2} = x^{-1/2}$$

Reemplazando en la fórmula:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int_2^{16} \sqrt{1 + [x^{-1/2}]^2} dx = \int_2^{16} \sqrt{1 + x^{-1}} dx = 14.99$$

// GRÁFICA CON SCILAB

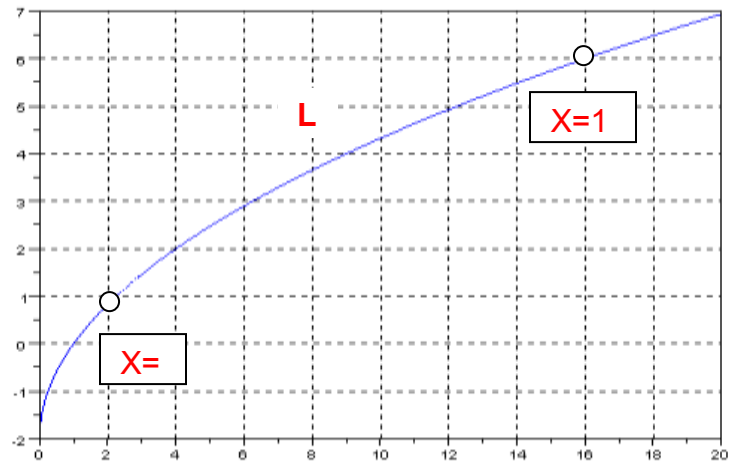
```

//valores de x
x=[0:0.01:20];
y=2*sqrt(x)-2;

```

plot(x, y)

xgrid



Usando Scilab:

//la función derivada es

```
function y=f(x)
```

```
df=x^(-1/2);
```

```
y=sqrt(1+df^2)
```

```
endfunction
```

//cálculo de la longitud

```
intg(2,16,f)
```

//ans=14.99

5.4 SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN

La superficie de revolución generada al girar una curva $f(x)$ alrededor del eje x entre los valores $x=a$ y $x=b$, es igual a:

$$S = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Ejemplo:

Hallar el área de la superficie generada al girar $f(x)=2x^3-2$ alrededor del eje x entre $x=1.2$ y $x=1.5$

Si $f(x)=2x^3-2$, entonces, $f'(x)=6x^2$

$$S = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = 2\pi \int_{1.2}^{1.5} (2x^3 - 2) \sqrt{1 + [6x^2]^2} dx$$

$$S = 2\pi \int_{1.2}^{1.5} (2x^3 - 2) \sqrt{1 + 36x^4} dx = 64.47$$

// GRÁFICA CON SCILAB,

//valores de x

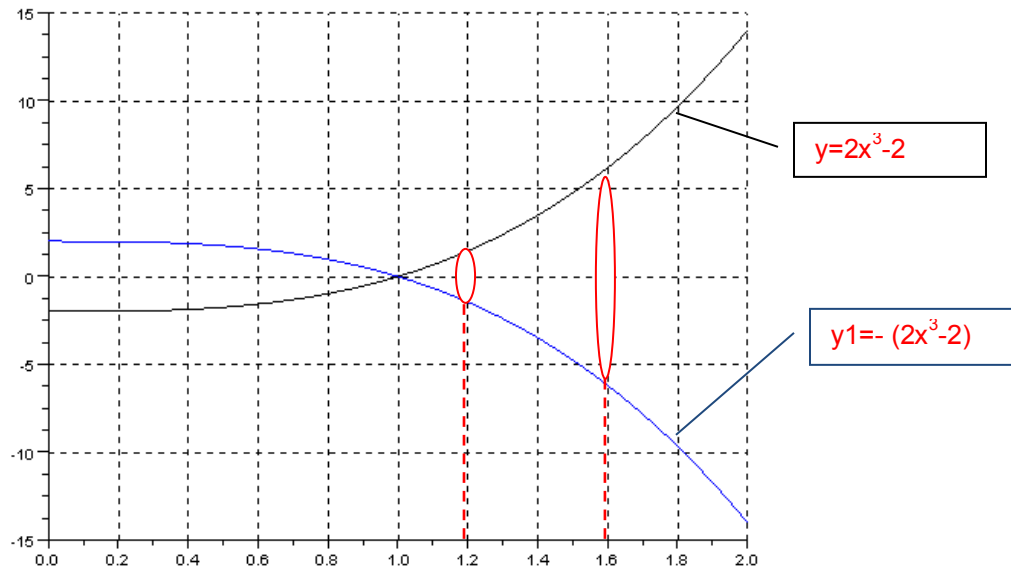
$x=[0:0.01:2];$

$y=2*x^3-2;$

$y1=-(2*x^3-2);$

$\text{plot2d}(x,[y' y1'])$

xgrid



Calculando por Scilab:

//la función es

```
function y=f(x)
```

```
    df=6*x^2;
```

```
    y=2*%pi*(2*x^3-2)*sqrt(1+df^2)
```

```
endfunction
```

//cálculo del área de revolución

```
intg(1.2,1.6,f)
```

//ans=64.47