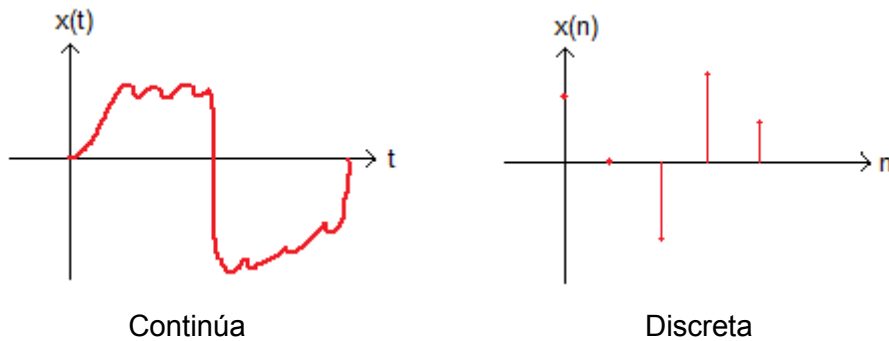


TEMA 1: TEORÍA DE SEÑALES Y SISTEMAS

DEFINICIÓN DE SEÑAL: Matemáticamente es una variable que contiene información y representa una cantidad física, por ejemplo encontramos señales de audio, imagen, ruido, termoeléctricas, bioeléctricas, etc.

CLASIFICACION DE LAS SEÑALES

a. Continuas o discretas



b. Periódica o no periódica

La señal periódica se repite después de un intervalo de tiempo llamado periodo.

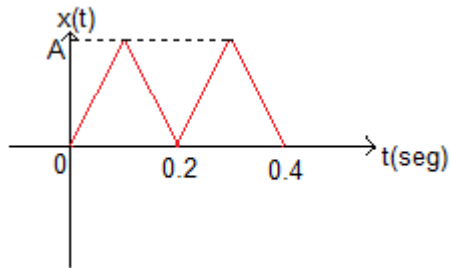
$$x(t) = x(t + T)$$

$T = \text{Periodo}; f = \text{Frecuencia}$

$$f = \frac{1}{T}$$

$\omega = \text{Frecuencia angular}; \omega = 2\pi f$

Periódica

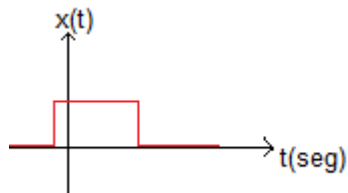


No periódica

$$T = 0.2 \text{ seg}$$

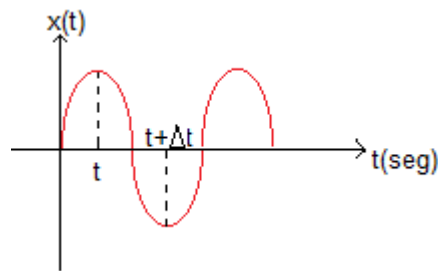
$$f = \frac{1}{0.2} = 5 \text{ Hz}$$

$$\omega = 10\pi \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$$

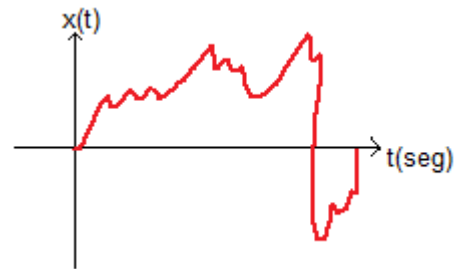


c. Determinística o estocástica

Determinística porque tiene un valor en (t) y en otro tiempo $(t + \Delta t)$, predecible.



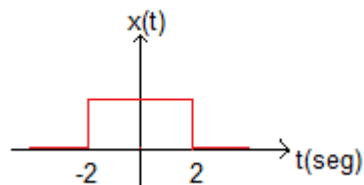
Determinística



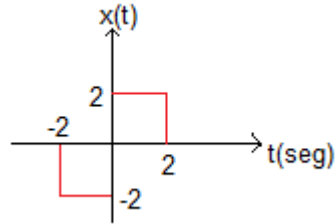
Estocástica

d. Par e impar

Par: $x(t) = x(-t)$



Impar: $x(t) = -x(-t)$ $x(-t) = -x(t)$



$$x(t) = x_p(t) + x_i(t)$$

$$x_p(t): \text{Señal Par} \rightarrow x_p(t) = \frac{1}{2} [x(t) + x(-t)]$$

$$x_i(t): \text{Señal Impar} \rightarrow x_i(t) = \frac{1}{2} [x(t) - x(-t)]$$

ENERGIA Y POTENCIA DE UNA SEÑAL

Energía total de una señal:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)]^2 dt$$

Potencia promedio:

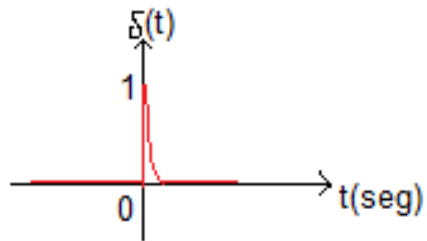
$$P = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [x(t)]^2 dt$$

Si es periódica:

$$P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [X(t)]^2 dt$$

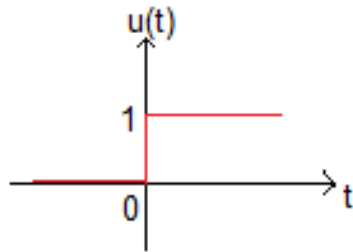
SEÑALES FUNDAMENTALES

a. Impulso unitario $\delta(t)$



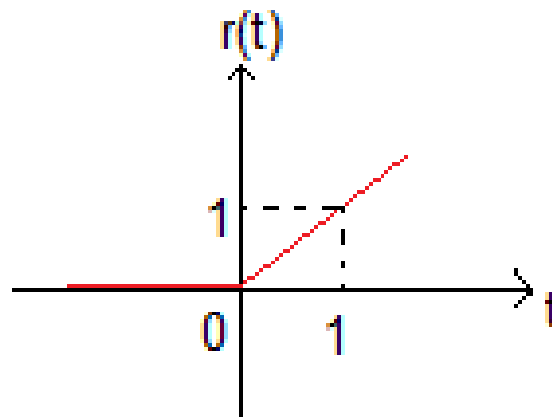
$$\delta(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

b. Escalón unitario $u(t)$



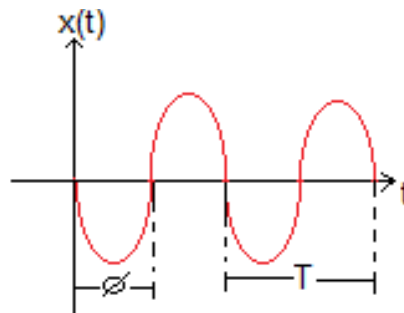
$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

c. Rampa unitaria $r(t)$



$$r(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

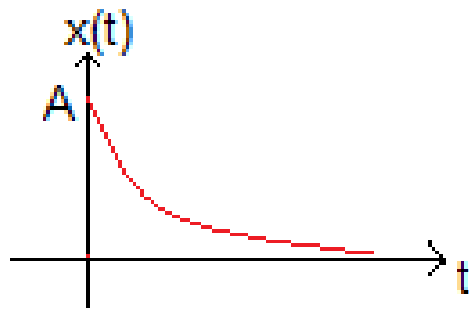
d. Senoidal $\text{sen}(\omega t + \varphi)$



$$x(t) = \text{sen}(2\pi f t + \varphi)$$

$\varphi = \text{fase o corrimiento}$

e. Exponencial $x(t) = Ae^{-t}$

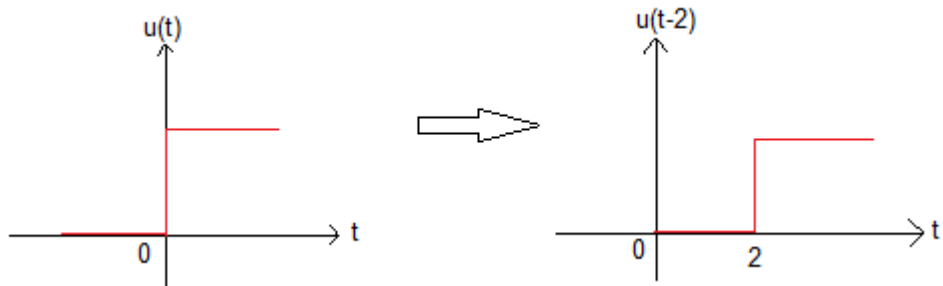


TRANSFORMACIONES DE LA SEÑAL

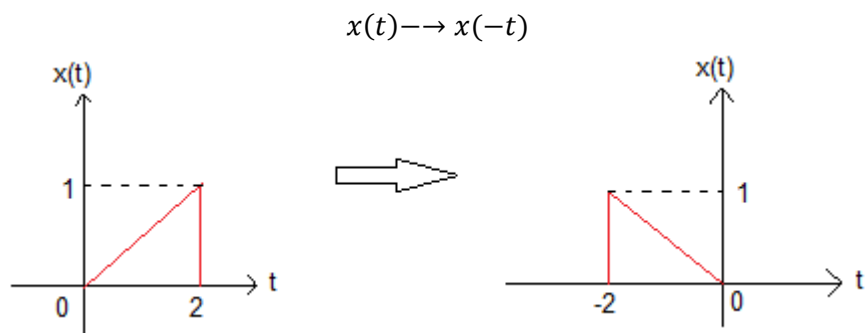
Corrimiento: Es el desplazamiento de la señal en el tiempo

$$x(t) \rightarrow x(t - t_0)$$

Ejemplo: Graficar $u(t - 2)$ si $u(t)$ es el paso unitario



Reflexión: Es el espejo de la señal en el tiempo



OPERACIONES DE LA SEÑAL

a. Escalamiento

$$y(t) = c \cdot x(t) \quad \text{Ej: Amplificador}$$

b. Suma

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t) \quad \text{Ej: Mezclador}$$

c. Multipliación

$$y(t) = x_1(t) * x_2(t) \quad \text{Ej: Modulador AM}$$

d. Diferenciación

$$y(t) = \frac{d}{dt} x(t) \quad \text{Ej: salida en una bobina}$$

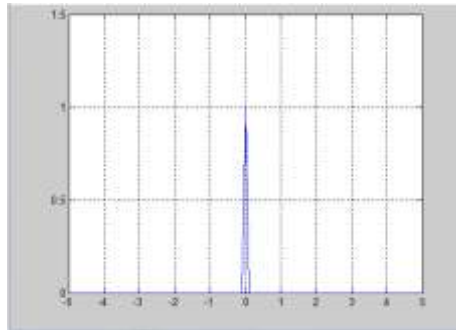
e. Integración

$$y(t) = \int x(t) dt \quad \text{Ej: Salida en un condensador}$$

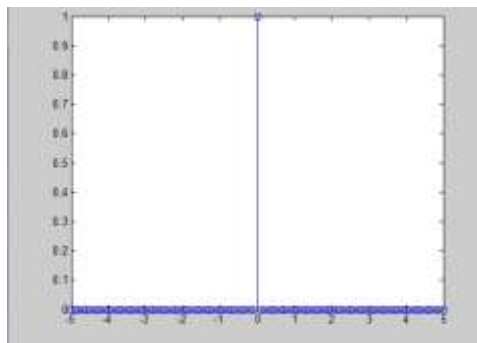
COMO GENERAR SEÑALES CON MATLAB

a) IMPULSO

```
t=-5:0.1:5; %Intervalo de tiempo para el que se va a realizar la grafica.  
d=zeros(1,101); %Cantidad de puntos que se encuentran en el intervalo de  
tiempo establecido.  
d(51)=1; %Punto en el que se producir el impulse.  
plot(t,d) %Comando para realizar la grafica.  
axis([-5 5 0 1.5]); %Comando para acotar los intervalos de los ejes.  
grid %Comando para colocar grilla a la grafica.
```

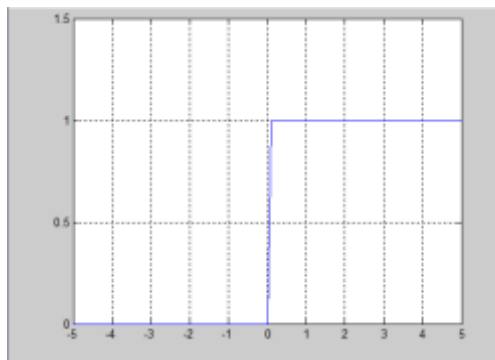


```
%Discreto
stem(t,d) %Comando para discretizar la grafica.
```

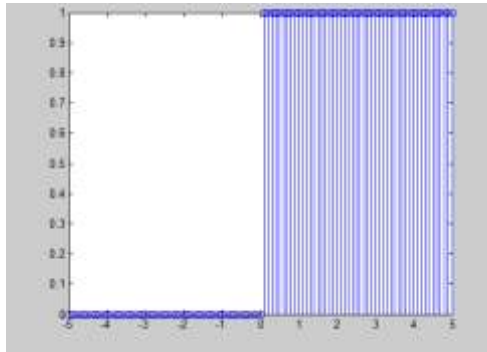


b) ESCALON

```
t=-5:0.1:5; %Intervalo de tiempo para el que se va a realizar la grafica.
u=[zeros(1,51),ones(1,50)]; %Cantidad de puntos del intervalo que
corresponden al valor cero o no del escalon.
plot(t,u) %Comando para realizar la grafica.
axis([-5 5 0 1.5]); %Comando para acotar los intervalos de los ejes.
grid %Comando para colocar grilla a la grafica.
```

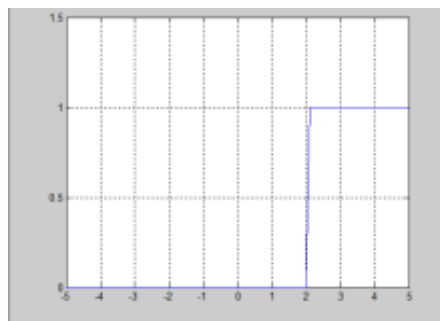


```
stem(t,u) %Comando para discretizar la grafica.
```

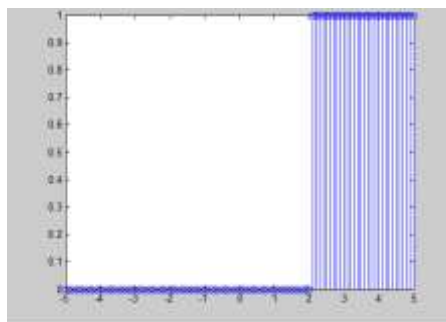


c) ESCALON CORRIDO EN (T-2)

```
t=-5:0.1:5; %Intervalo de tiempo para el que se va a realizar la grafica.
i=find(t==2.0); %Comando para encontrar el punto en que el tiempo es 2.
l=length(t); %Camando para descubrir el tamaño del vector.
um2=[zeros(1,i),ones(1,(l-i))]; %Cantidad de puntos del intervalo que
corresponden al valor cero o no del escalon.
plot(t,um2) %Comando para realizar la grafica.
axis([-5 5 0 1.5]); %Comando para acotar los intervalos de los ejes.
grid %Comando para colocar grilla a la grafica.
```

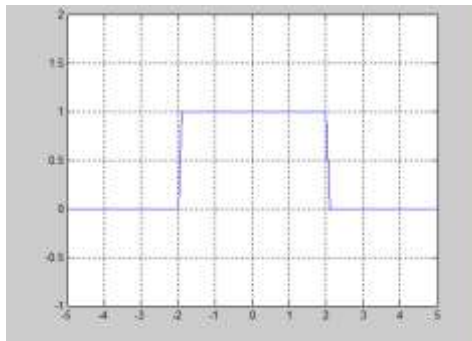


```
stem(t,um2) %Comando para discretizar la grafica.
```

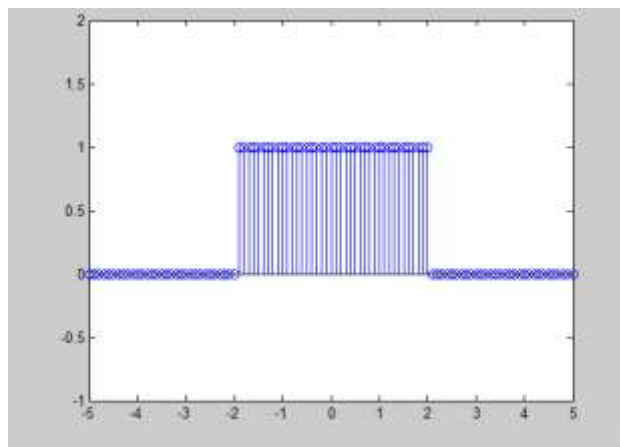


d) PULSO

```
%Generar el pulso
t=-5:0.1:5; %Vector de tiempo para el que se va a realizar la grafica.
i=find(t==-2.0); %Comando para encontrar el punto en que el tiempo es -2.
e=find(t==2.0); %Comando para encontrar el punto en que el tiempo es 2.
l=length(t); %Camando para descubrir el tamaño del vector.
u1=[zeros(1,e),ones(1,(l-e))]; %Cantidad de puntos del intervalo que
corresponden al valor cero o no del escalon.
u2=[zeros(1,i),ones(1,(l-i))];
u=u2-u1; %Resta de las dos señales expresadas anteriormente.
plot(t,u) %Comando para realizar la grafica.
axis([-5 5 -1 2]); %Comando para acotar los intervalos de los ejes.
grid %Comando para colocar grilla a la grafica.
```



```
stem(t,u) %Comando para discretizar la grafica.
```



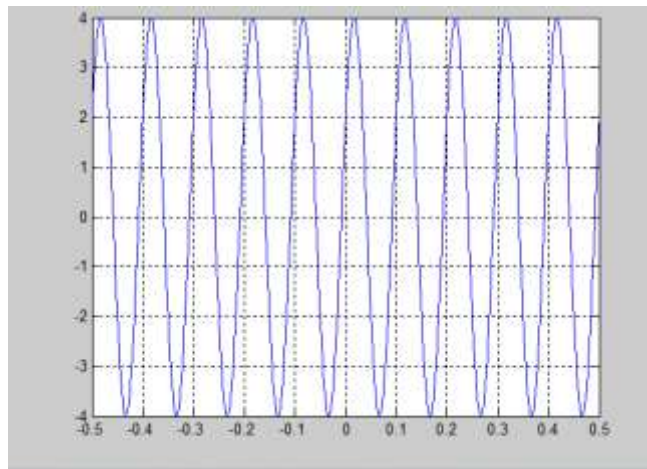
e) SEÑALES SENOIDALES

```
A=4; %amplitud de la señal
fi=30; %Fase en grados de la señal
```

```

fi=fi*pi/180; %Fase en radianes de la señal
T=0.1; %Periodo
f=1/T; %Frecuencia
t=-0.5:0.001:0.5; % Vector de tiempo para el que se va a realizar la
grafica.
x=A*sin(2*pi*f*t+fi); %Señal seno
plot(t,x) %Comando para realizar la grafica.
grid %Comando para colocar grilla a la grafica.

```

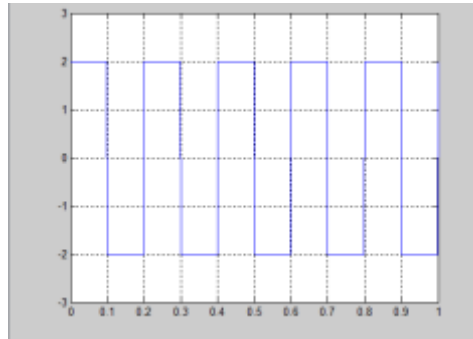


f) SEÑAL CUADRADA PERIODICA

```

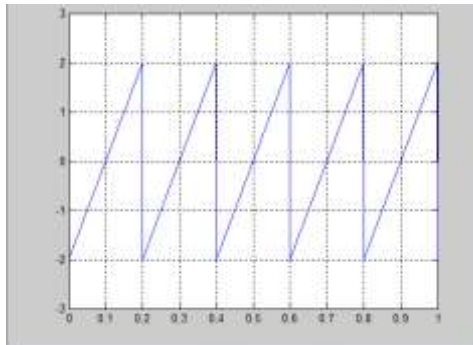
A=2; %amplitud de la señal
f=5; %Frecuencia
t=0:0.001:1; % Vector de tiempo para el que se va a realizar la grafica.
w=2*pi*f; %Frecuencia angular
x=A*square(w*t); %Funcion señal cuadrada
plot(t,x) %Comando para realizar la grafica.
axis([0 1 -3 3]); %Comando para acotar los intervalos de los ejes.
grid %Comando para colocar grilla a la grafica.

```



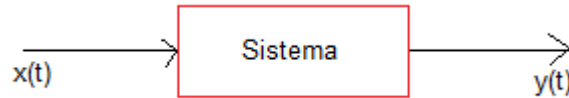
g) SEÑAL DIENTE DE SIERRA PERIODICA

```
A=2; %amplitud de la señal
f=5; %Frecuencia
t=0:0.001:1; % Vector de tiempo para el que se va a realizar la grafica.
w=2*pi*f; %Frecuencia angular
x=A*sawtooth(w*t); %Funcion señal diente de sierra
plot(t,x) %Comando para realizar la grafica.
axis([0 1 -3 3]); %Comando para acotar los intervalos de los ejes.
grid %Comando para colocar grilla a la grafica.
```



TEORÍA DE SISTEMAS

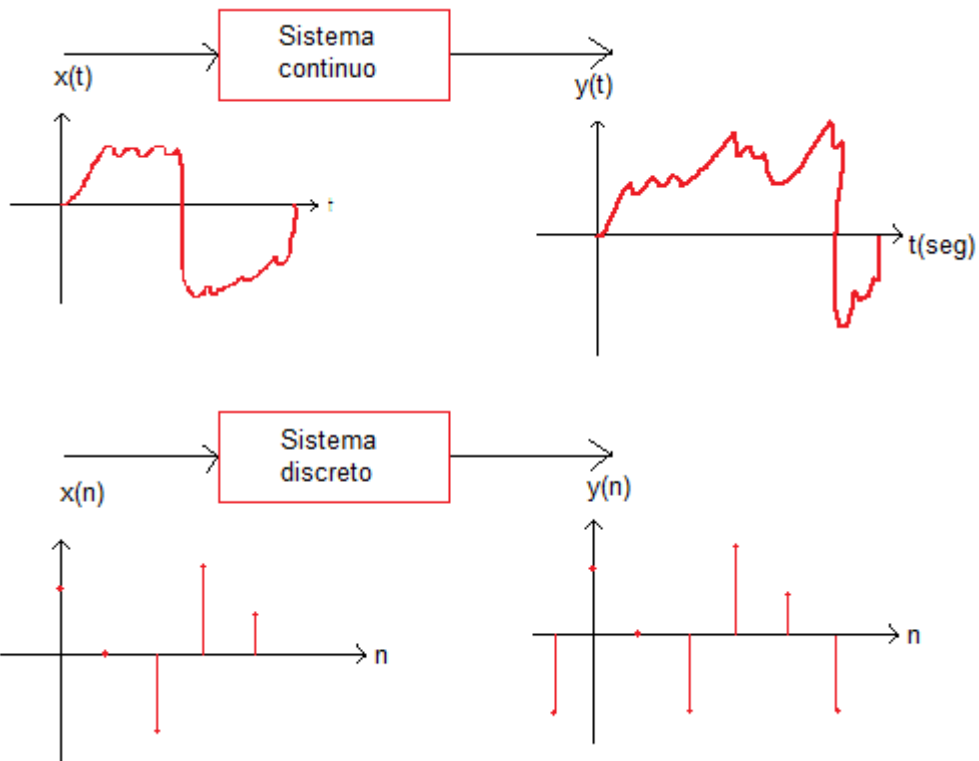
DEFINICIÓN DE SISTEMA: Es un conjunto de elementos relacionados entre sí que tienen un objetivo común. Ej. Eléctricos, mecánicos, ópticos, hidráulicos, térmicos, etc.



CLASIFICACION DE LOS SISTEMAS

Los sistemas pueden ser:

a. Continuos o discretos



b. Lineal o no lineal

Es lineal si cumple el principio de superposición.

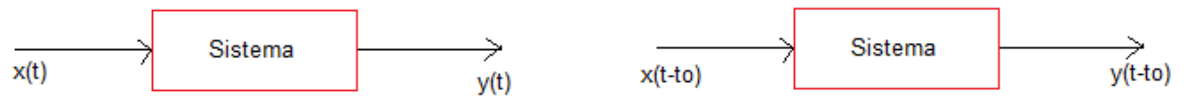


si $x(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$ entonces por superposición

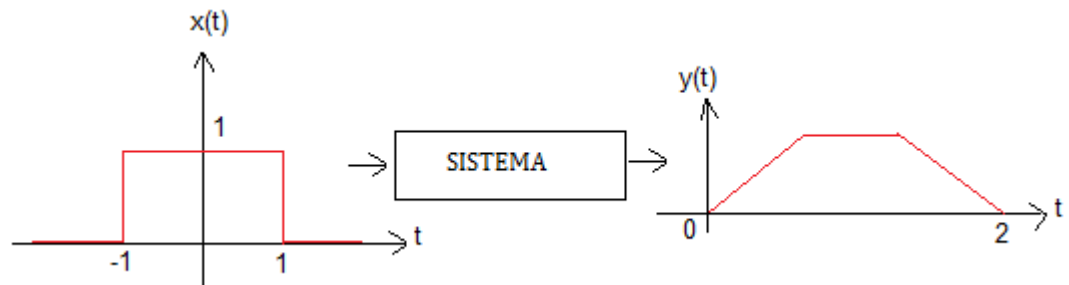
$$y(t) = ay_1(t) + by_2(t)$$

c. Invariante o no invariante

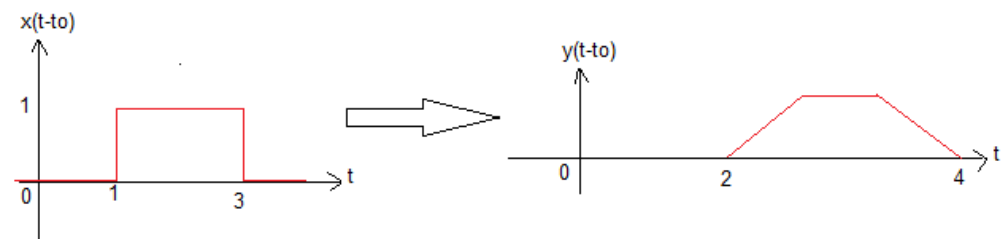
Es invariante si cumple la propiedad de corrimiento, esto es:



Por ejemplo para el sistema:



Si es invariante el corrimiento a la entrada aparece a la salida:

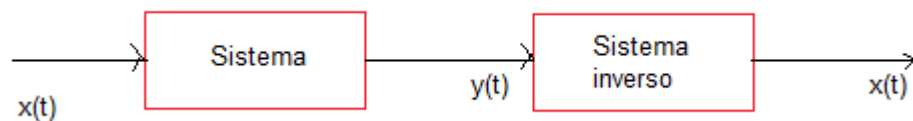


d. Causal o no causal

Es causal si la salida depende solamente de los valores previos de la entrada. De lo contrario es no causal, o sea, puede depender de salidas o entradas pasadas.

e. Invertible o no invertible

Es invertible si la entrada puede ser reconstruida usando un sistema inverso. Por ejemplo $x(t) = \cos(x)$ es no invertible.

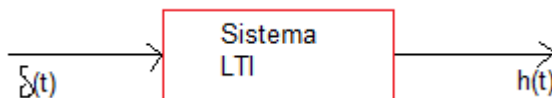


f. Estable o inestable

Es estable si en una entrada acotada se produce una salida acotada.

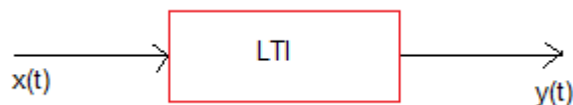
$y(t) = e^{-t}x(t)$ es estable $y(t) = e^t x(t)$ es inestable

SISTEMAS LTI : Lineales invariantes en el tiempo



$h(t)$: Respuesta al impulso unitario

PROPIEDADES



✓ Convolución

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$*$ = *convolución*

✓ Conmutativa

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

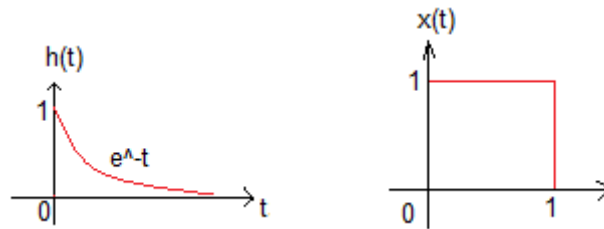
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau) d\tau$$

EJEMPLO 1.8

Realizar la convolución de:

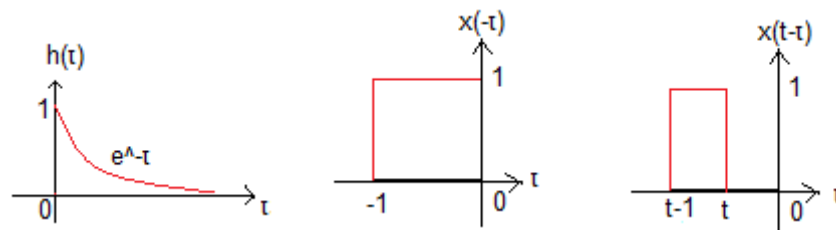
$$h(t) = e^{-t}$$

$$X(t) = u(t) - u(t - 1)$$



$$y(t) = x(t) * h(t)$$

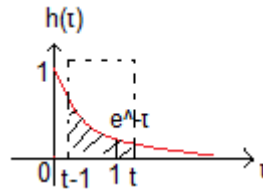
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau) d\tau$$



a). $t \leq 0 \rightarrow y(t) = 0$

b). $0 \leq t < 1 \rightarrow y(t) = \int_0^t e^{-\tau} d\tau = [-e^{-\tau}] = 1 - e^{-t}$

c). $t \geq 1$



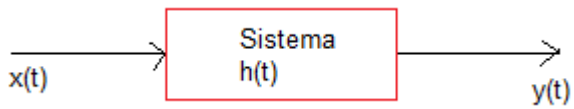
$$y(t) = \int_{t-1}^t e^{-\tau} d\tau = [-e^{-\tau}] = -e^{-t} + ee^{-t} = (e - 1)e^{-t}$$

EJEMPLO 1.9

Realizar la convolución

$$x(t) = \begin{cases} e^{-3t}, & 0 < t < 2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

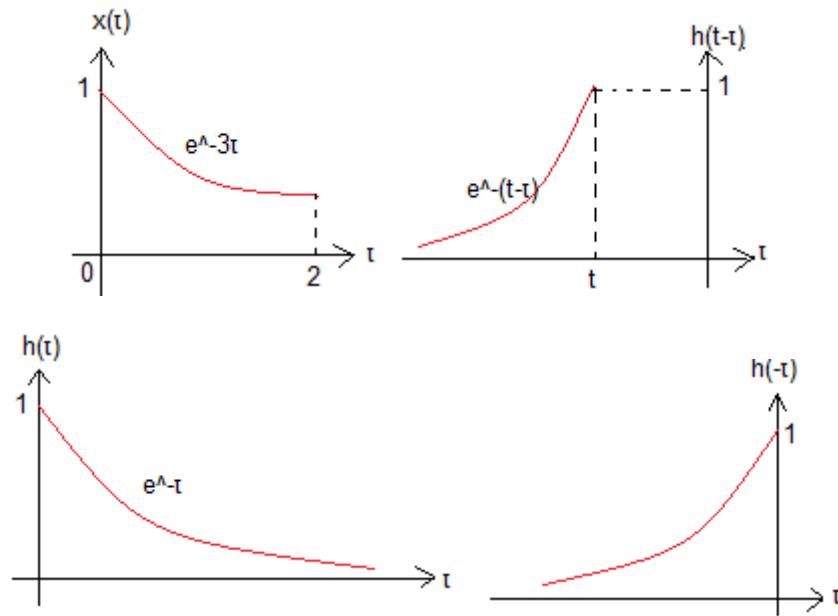
$$h(t) = e^{-t}u(t)$$



Solución

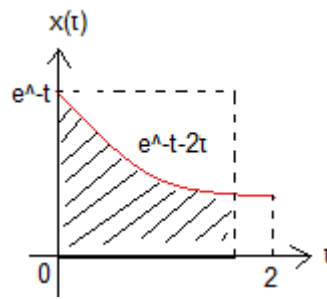
$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau$$



a). $t < 0; \rightarrow y(t) = 0$

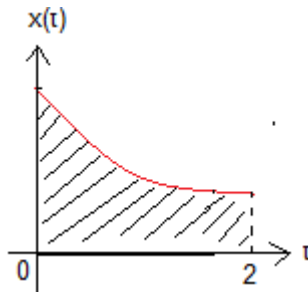
b). $0 \leq t < 2$



$$e^{-3\tau} e^{-(t-\tau)} = e^{-t-2\tau}$$

$$y(t) = \int_0^t e^{-t-2\tau} d\tau = e^{-t} \left[-\frac{1}{2} e^{-2\tau} \right] = \frac{1}{2} (e^{-t} - e^{-3t})$$

c). $t \geq 2$



$$y(t) = \int_0^2 e^{-t-2\tau} d\tau = e^{-t} \left[-\frac{1}{2} e^{-2\tau} \right] = \frac{1}{2} (1 - e^{-4}) e^{-t}$$

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2} (e^{-t} - e^{-3t}), & 0 \leq t < 2 \\ \frac{1}{2} (1 - e^{-4}) e^{-t}, & t \geq 2 \end{cases}$$

EJEMPLO 1.10:

Determinar si la señal es periódica, si lo es hallar su periodo.

a). $x(t) = 4\cos(5\pi t - \pi/4)$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi); \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

$T = \text{Periodo}$

$$\omega = 5\pi = \frac{2\pi}{T}; \text{es periodica}$$

$$T = \frac{2\pi}{5\pi} = \frac{2}{5}; 0.4 \text{ seg}$$

b). $x(t) = 3\cos 4t + \text{sen}(\pi t)$

$$\omega_1 = 4 = \frac{2\pi}{T_1} \rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$\omega_2 = \pi = \frac{2\pi}{T_2} \rightarrow T_2 = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\pi/2}{2} = \frac{\pi}{4}; \text{No es periodica}$$

Nota: la relación debe dar numerador y denominador enteros.

$$c). x(t) = \cos(3\pi t) + 2\cos(4\pi t)$$

$$\omega_1 = 3\pi = \frac{2\pi}{T_1} \rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{3\pi} = \frac{2}{3}$$

$$\omega_2 = 4\pi = \frac{2\pi}{T_1} \rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2/3}{1/2} = \frac{4}{3}; \text{Si es periodica}$$

$$3T_1 = 4T_2 = T$$

$$T = 3\left(\frac{2}{3}\right) = 2 \text{ seg}$$

EJEMPLO 1.11:

Determinar si los siguientes sistemas son: lineales, invariantes, causales o con memoria.

$$a). \frac{dy}{dt} + 6y(t) = 4x(t)$$

“Las ecuaciones diferenciales de orden 1 representan un sistema continuo”

“Los coeficientes que acompañan la y al ser constantes representan un sistema invariante”

“Si no depende de entradas futuras el sistema es causal”

“Si posee diferenciales la ecuación el sistema tiene memoria”

De acuerdo con esto este sistema es: Lineal, invariante, causal y con memoria.

b). $\frac{dy}{dt} + 4ty(t) = 2x(t)$

El sistema es: Lineal, no invariante, causal y con memoria.

c). $y(t) = \text{sen}[x(t)]$

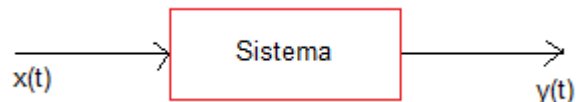
El sistema es: No lineal, invariante, causal y sin memoria.

d). $\frac{dy}{dt} + y^2(t) = x(t)$

El sistema es: No lineal, invariante, causal y con memoria.

e). $\frac{dy}{dt} + \text{sen}(t)y(t) = x(t + 2)$

El sistema es: Lineal, no invariante, no causal y con memoria.



$$x(t) = a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$$

$$y(t) = a_1y_1(t) + a_2y_2(t)$$

PROPIEDADES DE LOS SISTEMAS LTI

a). Conmutativa

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

b). Distributiva

$$x(t) * [ah_1(t) * bh_2(t)] = ax(t) * h_1(t) + bx(t) * h_2(t)$$

c). Asociativa

$$x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] = x(t) * h_1(t) * h_2(t)$$

d). Invertibilidad

$$h(t) * h^{-1} = \delta(t)$$

e). Estabilidad

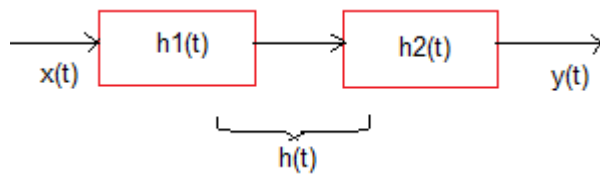
$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

f). Causalidad

$$h(t) = 0, \text{ Para } t < 0$$

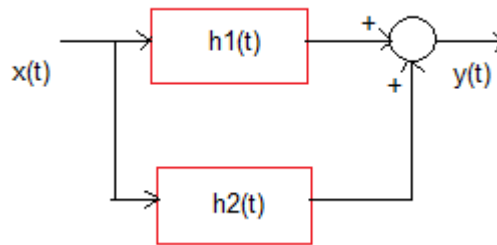
ESTRUCTURA DE LOS SISTEMAS

a). Conexión serie



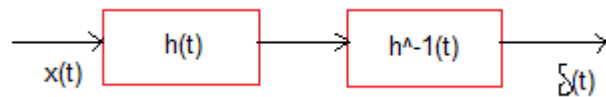
$$h(t) = h_1(t) * h_2(t)$$

b). Conexión paralela



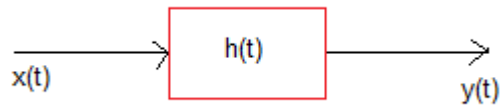
$$h(t) = h_1(t) + h_2(t)$$

c). Sistema invertible



$$h(t) * h^{-1}(t) = \delta(t)$$

RESPUESTA EN FRECUENCIA DEL SISTEMA



$x(t) = e^{j\omega t} \rightarrow$ Señal exponencial compleja

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau$$

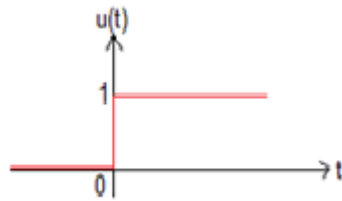
$$y(t) = e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \rightarrow \text{Respuesta en frecuencia}$$

EJEMPLO 1.12

Encontrar la respuesta a un sistema a la entrada del escalón unitario si $H(t)$ es igual a:

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$



$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{RC} e^{-\tau/RC} e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{RC} \int_0^{\infty} e^{-(j\omega + \frac{1}{RC})\tau} d\tau$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{RC} \left[-\frac{1}{j\omega + 1/RC} e^{-(j\omega + \frac{1}{RC})\tau} \right]$$

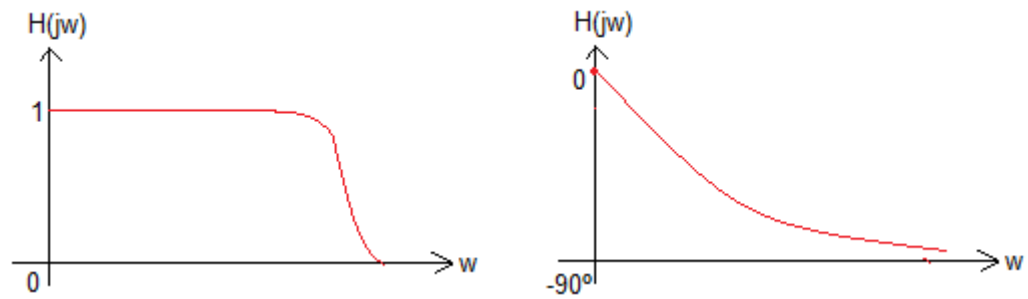
$$H(j\omega) = \frac{1/RC}{j\omega + 1/RC} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Magnitud

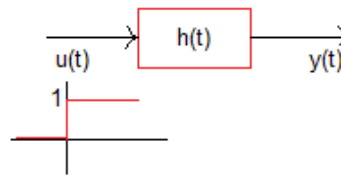
$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

Fase

$$\varphi = 0 - \tan^{-1}(\omega RC) = -\tan^{-1}(\omega RC)$$

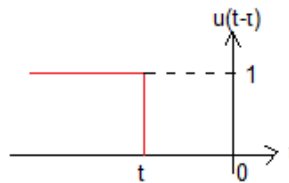


Respuesta al escalón



$h(t)$: Respuesta al impulso unitario

$$y(t) = u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) u(t - \tau) d\tau$$



$$y(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau$$

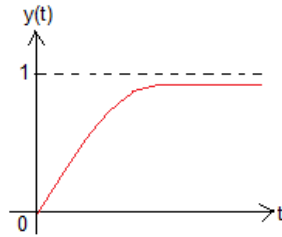
Sea: $h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{RC} e^{-\frac{\tau}{RC}} u(\tau) d\tau$$

$$y(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t e^{-\frac{\tau}{RC}} u(\tau) d\tau$$

$$y(t) = \frac{1}{RC} \left[-RC e^{-\frac{\tau}{RC}} \right] = -e^{-\frac{\tau}{RC}}$$

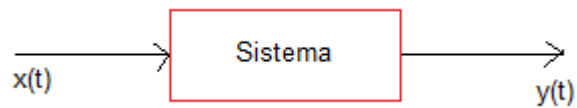
$$y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{RC}}$$



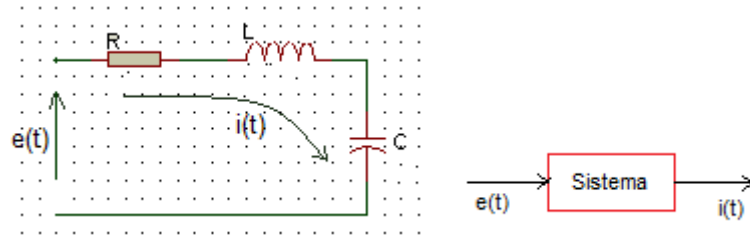
REPRESENTACION DE SISTEMAS

Un sistema se puede representar mediante:

- Ecuaciones diferenciales
- Ecuaciones de estado



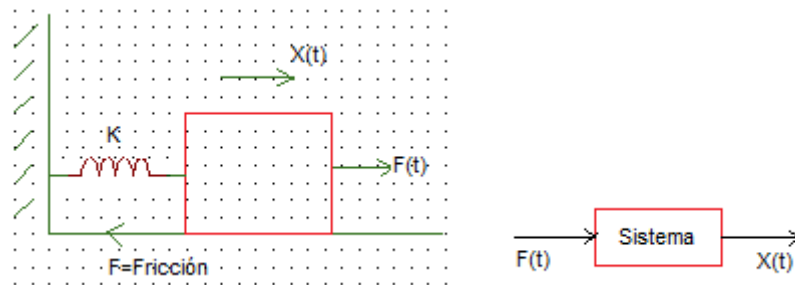
EJEMPLO 1.13: SISTEMA ELÉCTRICO



$$e(t) = Ri(t) + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i \, dt, \text{ derivando}$$

$$\frac{de}{dt} = R \frac{di}{dt} + L \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{i(t)}{C}, \rightarrow \text{Ecuacion diferencial de orden 2}$$

EJEMPLO 1.14: SISTEMA MECÁNICO



K= Constante del resorte

m= Masa

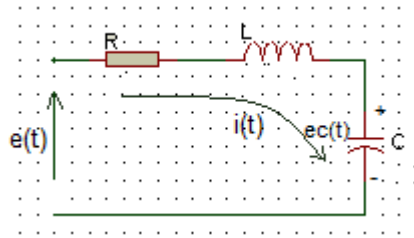
F= Fricción

X= Desplazamiento

F(t)= Fuerza aplicada

$$F(t) = m \frac{d^2x}{dt^2} + F \frac{dx}{dt} + Kx; \rightarrow \text{Ecuacion de segundo orden}$$

EJEMPLO 1.15: VARIABLES DE ESTADO



Ecuaciones:

$$1. \quad i(t) = C \frac{de_c}{dt} \rightarrow \frac{de_c}{dt} = \frac{1}{C} i(t)$$

$$2. \quad L \frac{di}{dt} = e(t) - Ri(t) - e_c(t) \rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{1}{L} e(t) - \frac{1}{L} Ri(t) - \frac{1}{L} e_c(t)$$

En forma matricial (Ecuaciones de estado)

$$\begin{bmatrix} \frac{de_c}{dt} \\ \frac{di}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{1}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_c \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} e(t)$$

Variables de estado e_c, i

$$\dot{\bar{x}} = A \bar{x} + B u(t), \text{ Donde}$$

$u(t)$: Entrada al sistema

$\bar{x}$ = Vector de estado

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \dot{e_c} \\ \dot{i} \end{bmatrix}; \text{ el punto } (.) \text{ Significa derivada.}$$

EJEMPLO 1.16:

Representar la siguiente ecuación diferencial mediante ecuaciones de estado

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 5\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + 2y(t) = u(t); \text{Ecuacion de orden 3}$$

Solución

Tres variables de estado: x_1, x_2, x_3

$$\text{Despejando: } \frac{d^3y}{dt^3} = -5\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 2y(t) + u(t)$$

Se define:

$$x_1(t) = y(t)$$

$$x_2(t) = \frac{dy}{dt}$$

$$x_3(t) = \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}; \text{vector de estado}$$

Tenemos:

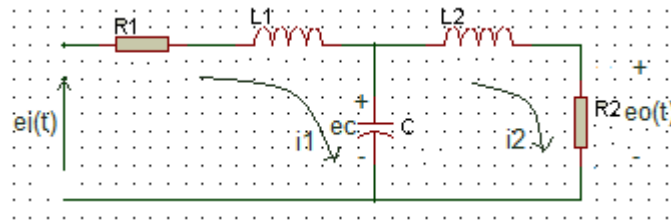
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Ecuación de salida $y(t)$:

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = C\bar{x} + Du(t)$$

EJEMPLO 1.17



Ecuaciones

$$1. \quad e_i = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + e_c$$

$$2. \quad e_c = L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2$$

$$3. \quad C \frac{de_c}{dt} = i_1 - i_2$$

Variables de estado: i_1 , i_2 , i_3 , despejamos:

$$1. \quad \frac{di_1}{dt} = -\frac{R_1}{L_1} i_1 + \frac{e_i}{L_1} - \frac{e_c}{L_1}$$

$$2. \quad \frac{di_2}{dt} = \frac{e_c}{L_2} - \frac{R_2}{L_2} i_2$$

$$3. \quad \frac{de_c}{dt} = \frac{i_1}{C} - \frac{i_2}{C}$$

Ahora:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_1 \\ \dot{i}_2 \\ \dot{e}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L_1} & 0 & -\frac{1}{L_1} \\ 0 & -\frac{R_2}{L_2} & \frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ e_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e_i$$

Ecuación de salida:

$$e_o(t) = R_2 i_2$$

$$e_o = [0 \quad R_2 \quad 0] \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ e_c \end{bmatrix}$$

TRANSFORMADA DE LA PLACE

Matemáticamente convierte una ecuación diferencial en función de $x(t)$, en una ecuación algebraica en función de $x(s)$ para el análisis de sistemas continuos.

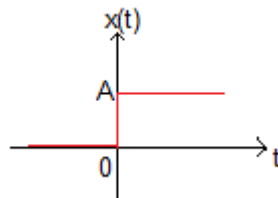
$$X(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$$

$$\mathcal{L}[X(t)] = X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-st} dt$$

Para $t \geq 0$

$$X(s) = \int_0^{\infty} X(t) e^{-st} dt$$

a). Función escalón



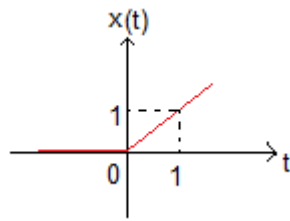
$$x(t) = Au(t)$$

$$x(s) = \int_0^{\infty} A e^{-st} dt = A \int_0^{\infty} e^{-st} dt$$

$$x(s) = A \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right] = \frac{A}{s}$$

$$\mathcal{L}[A] = \frac{A}{s}$$

b). Función rampa



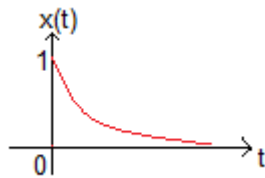
$$x(t) = At, \quad t \geq 0$$

$$x(s) = \int_0^{\infty} A t e^{-st} dt$$

$$x(s) = A \left[t \frac{e^{-st}}{-s} \right] - \int_0^{\infty} \frac{e^{-st}}{-s} A dt = A \left[\frac{e^{-st}}{-s^2} \right] = \frac{A}{s^2}$$

$$\mathcal{L}[At] = \frac{A}{s^2}$$

c). Función exponencial



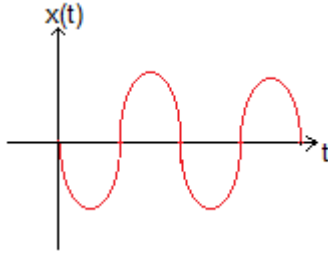
$$x(t) = e^{-at}, \quad t \geq 0$$

$$x(s) = \int_0^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+s)t} dt$$

$$x(s) = \left[\frac{e^{-(a+s)t}}{-(a+s)} \right] = \frac{1}{s+a}$$

$$\mathcal{L}[e^{-at}] = \frac{1}{s+a}; \quad \mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$$

d). Función senoidal



$$x(t) = A \sin(\omega t)$$

$$x(t) = \frac{A}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}), \text{ (Euler)}$$

$$x(s) = \frac{A}{2j} \int_0^{\infty} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) e^{-st} dt = \frac{A}{2j} \left[\int_0^{\infty} e^{(j\omega-s)t} dt - \int_0^{\infty} e^{-(j\omega-s)t} dt \right]$$

$$x(s) = \frac{A}{2j} \left\{ \left[\frac{e^{(j\omega-s)t}}{j\omega-s} \right] - \left[\frac{e^{-(j\omega-s)t}}{-(j\omega-s)} \right] \right\} = \frac{A}{2j} \left[\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega} \right] = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}[A \sin(\omega t)] = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}; \quad \mathcal{L}[A \cos(\omega t)] = \frac{As}{s^2 + \omega^2}$$

e). Función de corrimiento

$$x(t) = x(t-a)u(t-a)$$

$$\mathcal{L}[x(t)] = \int_0^{\infty} x(t-a)u(t-a)e^{-st} dt = \int_a^{\infty} x(\tau)u(\tau)e^{-s(\tau+a)} d\tau$$

$$\mathcal{L}[x(t)] = \int_0^{\infty} x(\tau)e^{-s\tau} \cdot e^{-as} d\tau = e^{-as} \int_0^{\infty} x(\tau)e^{-s\tau} d\tau$$

$$\mathcal{L}[x(t)] = e^{-as}X(s)$$

$$\mathcal{L}[x(t-a)] = e^{-as}X(s)$$

EJEMPLO 1.18

a) $x(t) = 4\text{sen}(100t) u(t)$

Solución

$$\mathcal{L}[x(t)] = X(s) = \frac{4(100)}{s^2 + (100)^2} = \frac{400}{s^2 + (100)^2}$$

b) $x(t) = 4\text{sen}(100t - 10) = 4\text{sen}[100(t - 0.1)]$

Solución

$$\mathcal{L}[x(t)] = X(s) = \frac{4(100)}{s^2 + (100)^2} \cdot e^{-0.1s}$$

c) $x(t) = 2u(t) + \delta(t - 4) - \cos(5t) u(t)$

Solución

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

$$\mathcal{L}[x(t)] = X(s) = \frac{2}{s} + e^{-4s} - \frac{s}{s^2 + 25}$$

d). Multiplicación por e^{-at}

$$\mathcal{L}[e^{-at}x(t)] = \int_0^{\infty} e^{-at}x(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} x(t)e^{-(s+a)t} dt = X(s+a)$$

$$\mathcal{L}[e^{-at}x(t)] = X(s+a); \text{Traslación}$$

EJEMPLO 1.19

a) $x(t) = u(t) - e^{-2t} \cos(10t) u(t)$

Solución

$$x(s) = \frac{1}{s} - \frac{s+2}{(s+2)^2 + 10^2}$$

b) $x(t) = e^{-3t} \cdot t$

Solución

$$x(s) = \frac{1}{(s+3)^2}$$

TEOREMAS DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

a) Diferenciación

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx}{dt}\right] = sX(s) - x(0); \quad x(0) = x(t)_{t=0}$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] = s^2X(s) - sx(0) - x'(0)$$

General

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^nx}{dt^n}\right] = s^nX(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}x'(0) \dots - sx^{n-2}(0) - x^{n-1}(0)$$

b) Diferenciación compleja

$$\mathcal{L}[tx(t)] = -\frac{d}{ds}X(s)$$

$$\mathcal{L}[t^2x(t)] = \frac{d^2}{ds^2}X(s)$$

⋮

$$\mathcal{L}[t^nx(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}X(s)$$

c) Integración

$$\mathcal{L}\left[\int x(t) dt\right] = \frac{X(s)}{s}$$

d) Convolución

$$\mathcal{L}[x_1(t) * x_2(t)] = X_1(s)X_2(s)$$

e) Teorema del valor inicial

$$x(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$$

f) Teorema del valor final

$$x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$$

EJEMPLO 1.20

1. Hallar el valor inicial de $x(t)$ si:

$$X(s) = \frac{2s + 1}{s^2 + s + 1}$$

Solución

$$x(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{2s + 1}{s^2 + s + 1}$$

$$x(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2s^2 + s}{s^2 + s + 1} = 2$$

2. Hallar el valor final de $x(t)$ si:

$$a) X(s) = \frac{10(s+1)}{s(s^2+4s+3)}$$

Solución

Debemos estudiar si el sistema es estable o no es estable, o sea que tenga los polos hacia la parte izquierda del plano.

$$s^2 + 4s + 3 = 0$$

$$(s+1)(s+3) = 0; \text{ Polos: } -1 \text{ y } -3, \text{ si es estable}$$

$$x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{10(s+1)}{s(s^2+4s+3)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{10(s+1)}{(s^2+4s+3)} = \frac{10}{3}$$

$$b) X(s) = \frac{10(s+1)}{s(s^2+4s-3)}$$

Solución

Debemos estudiar si el sistema es estable o no es estable, o sea que tenga los polos hacia la parte izquierda del plano.

$$s^2 + 4s - 3 = 0$$

$$(s+1)(s-3) = 0; \text{ Polos: } -1 \text{ y } 3, \quad \text{No es estable}$$

Por lo tanto no podemos continuar con el procedimiento.

TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$$

$$F(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$$

EJEMPLO 1.21

Encontrar $f(t)$ si:

$$F(s) = \frac{3}{s} + \frac{2}{s-2} - \frac{2}{s^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A}{s}\right] = A; \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A}{s^2}\right] = At; \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+a}\right] = e^{-at}$$

Solución

$$f(t) = 3 + 2e^{2t} - 2t$$

a) Fracciones parciales

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{a_1}{s+p_1} + \frac{a_2}{s+p_2} + \dots$$

$$a_k = [(s+p_k)F(s)]_{s=-p_k}$$

EJEMPLO 1.22

$$F(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$$

Solución

$$F(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2} = \frac{a_1}{s+1} + \frac{a_2}{s+2}$$

$$a_1 = \left[\frac{s+3}{s+2}\right]_{s=-1} = \frac{-1+3}{-1+2} = 2$$

$$a_2 = \left[\frac{s+3}{s+1}\right]_{s=-2} = \frac{-2+3}{-2+1} = -1$$

$$F(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = 2e^{-t} - e^{-2t}$$

b) Exponente numerador > Exponente denominador

EJEMPLO 1.23

$$G(s) = \frac{s^3 + 5s^2 + 9s + 7}{s^2 + 3s + 2}$$

$$\begin{array}{r} s^3 + 5s^2 + 9s + 7 \quad | \quad s^2 + 3s + 2 \\ -s^3 - 3s^2 - 2s \quad \quad s + 2 \\ \hline 2s^2 + 7s + 7 \\ -2s^2 - 6s - 4 \\ \hline s + 3 \end{array}$$

Solución

$$G(s) = (s + 2) + \frac{s + 3}{s^2 + 3s + 2}$$

$$G(s) = \frac{s + 3}{(s + 2)(s + 1)} = \frac{a_1}{s + 1} + \frac{a_2}{s + 2} = \frac{2}{s + 1} - \frac{1}{s + 2}$$

$$G(s) = (s + 2) + \frac{2}{s + 1} - \frac{1}{s + 2}$$

$$G(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} g(t)$$

$$g(t) = \frac{d}{dt} \left[\delta(t) + 2 \delta(t) \right] + 2e^{-t} - e^{-2t}$$

c) Polos múltiples

EJEMPLO 1.24

$$F(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s + 1)^3}$$

Solución

$$F(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s + 1)^3} = \frac{b1}{s + 1} + \frac{b2}{(s + 1)^2} + \frac{b3}{(s + 1)^3}$$

- $b3 = [(s + 1)^3 F(s)]_{s=-1} = [s^2 + 2s + 3]_{s=-1} = (-1)^2 + 2(-1) + 3 = 2$
- $b2 = \left[\frac{d}{ds} (s^2 + 2s + 3) \right]_{s=-1} = [2s + 2]_{s=-1} = 2(-1) + 2 = 0$
- $b1 = \left[\frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} (s^2 + 2s + 3) \right]_{s=-1} = \frac{1}{2} \left[\frac{d}{ds} (2s + 2) \right]_{s=-1} = 1$

$$F(s) = \frac{1}{s + 1} + \frac{2}{(s + 1)^3}$$

Sabemos que: $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{n!}{s^{n+1}} \right] = t^n$; entonces:

$$f(t) = e^{-t} + e^{-t} \cdot t^2$$

EJEMPLO 1.25

$$F(s) = \frac{2s + 12}{s^2 + 2s + 5}$$

Solución

$$F(s) = \frac{2s + 12}{s^2 + 2s + 5} = \frac{2s + 12}{(s + 1)^2 + 4}$$

Tenemos que:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{s^2 + \omega^2} \right] = \cos(\omega t); \quad \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right] = \sin(\omega t)$$

Ahora

$$F(s) = \frac{2s + 12}{(s + 1)^2 + 4} = \frac{2(s + 1)}{(s + 1)^2 + 2^2} + \frac{10}{(s + 1)^2 + 2^2} = \frac{2(s + 1)}{(s + 1)^2 + 2^2} + \frac{2 * 5}{(s + 1)^2 + 2^2}$$

$$f(t) = 2e^{-t} \cos(2t) + 5e^{-t} \sin(2t)$$

EJEMPLO 1.26

Hallar $X(t)$

$$X(s) = \frac{10(s+1)}{s(s^2+4s+8)}$$

Solución

$$X(s) = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+4s+8}$$

$$A = \left[\frac{10(s+1)}{(s^2+4s+8)} \right]_{s=0} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

$$10(s+1) = \frac{5}{4}(s^2+4s+8) + Bs^2 + Cs$$

$$0 = \frac{5}{4}s^2 + Bs^2 \rightarrow B = -\frac{5}{4}$$

$$10s = 5s + Cs \rightarrow C = 5$$

$$X(s) = \frac{5/4}{s} + \frac{-5/4(s+5)}{s^2+4s+8}$$

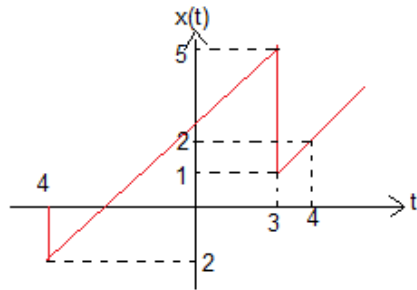
$$\frac{-5/4(s+5)}{s^2+4s+8} = \frac{-5/4(s+2)}{(s+2)^2+4} + \frac{2*15/4}{(s+2)^2+4}$$

$$x(t) = \frac{5}{4} - \frac{5}{4}e^{-2t} \cos(2t) + \frac{15}{4}e^{-2t} \sin(2t)$$

COMO APLICAR LO ANTERIOR CON MATLAB

GRAFICAR FUNCIONES

EJERCICIO No. 1.

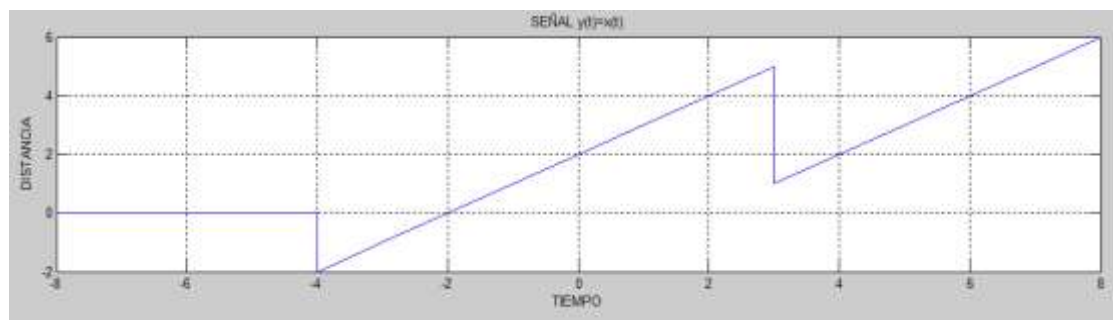


$$x(t) = \begin{cases} 0, & T < -4 \\ T + 2, & -4 \leq t < 3 \\ t - 2, & t \geq 3 \end{cases}$$

Solución

```
%Graficar señales
%Primer ejercicio
```

```
t1=-8:-4;%Tiempo para el primer segmento de recta que va de -8 hasta -4
x1=zeros(size(t1));%Ecuación para el primer segmento de recta o sea para
cuando es < que -4
t2=-4:3;%Tiempo para el segundo segmento de recta que va de -4 hasta 3
x2=t2+2;%Ecuación para el segundo segmento de recta o sea para cuando es
-4<=t<3
t3=3:8;%Tiempo para el tercer segmento de recta que va desde t=>3
x3=t3-2;%Ecuación para el tercer segmento de recta o sea para cuando es
t=>3
t=[t1 t2 t3];% Vector de tiempo
x=[x1 x2 x3];% Vector de espacio
figure(1)%Para mostrar en una figura aparte la grafica
subplot(211); %Matriz para visualizar dos graficas en la misma ventana
plot(t,x)% Graficar
grid %Colocar grilla a la grafica
title('SEÑAL x(t)')%Nombre de la señal
xlabel('TIEMPO')% Nombre del eje x del plano
ylabel('DISTANCIA')% Nombre del eje y del plano
```

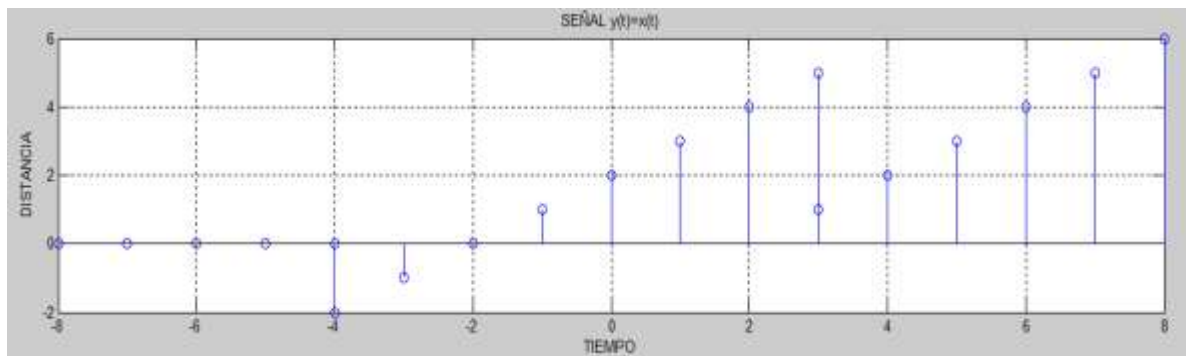


```
%Discretizar
stem(t,x)
```

```

grid %Colocar grilla a la grafica
title('SEÑAL x(t)') %Nombre de la señal
xlabel('TIEMPO') % Nombre del eje x del plano
ylabel('DISTANCIA') % Nombre del eje y del plano

```



EJERCICIO No. 2.

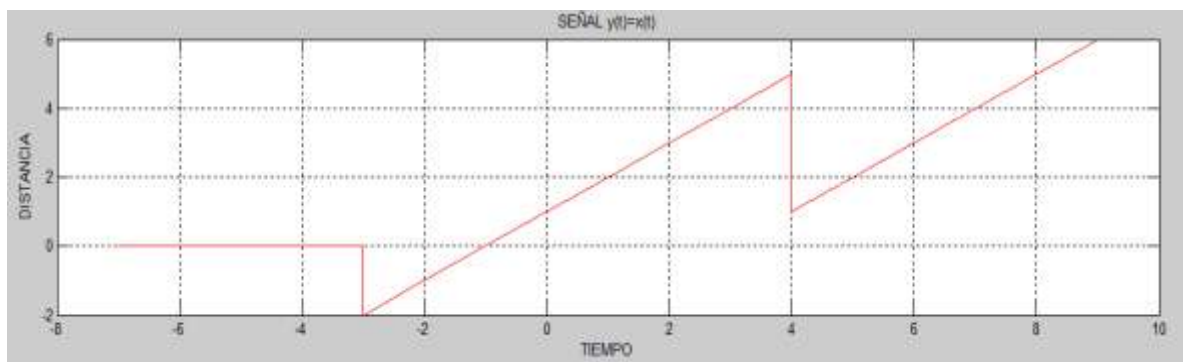
$$y(t) = x(t - 1)$$

Solución

```

%segundo
t=t+1;%Ecuación para adelantar la señal del ejercicio anterior
figure(2)%Para mostrar en una figura aparte la grafica
subplot(212)%Matriz para visualizar dos graficas en la misma ventana
plot(t,x,'r')% Graficar
grid%Colocar grilla a la grafica
title('SEÑAL y(t)=x(t)') %Nombre de la señal
xlabel('TIEMPO') % Nombre del eje x del plano
ylabel('DISTANCIA') % Nombre del eje y del plano

```

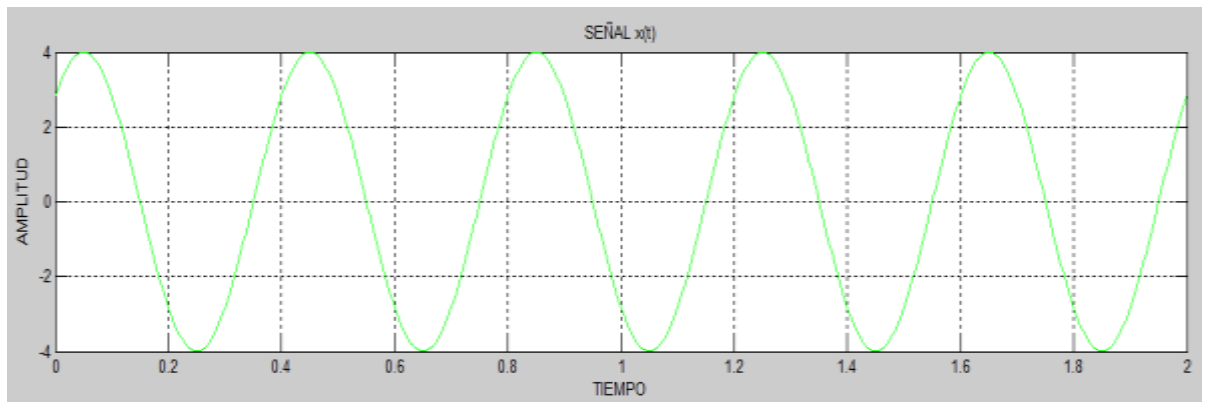


EJERCICIO No. 3

$$x(t) = 4\cos(5\pi t - \frac{\pi}{4})$$

Solución

```
%Tercero
w=5*pi;%Frecuencia angular
T=2*pi/w;%Periodo de la señal
t=0:T/100:2;% Vector tiempo
x=4*cos(5*pi*t-pi/4); %Función x(t)
plot(t,x,'g')% Graficar
grid%Colocar grilla a la grafica
title('SEÑAL x(t)')%Nombre de la señal
xlabel('TIEMPO')% Nombre del eje x del plano
ylabel('AMPLITUD')% Nombre del eje y del plano
```



EJERCICIO No. 4

$$x(t) = \cos(4t) + \text{sen}(8t)$$

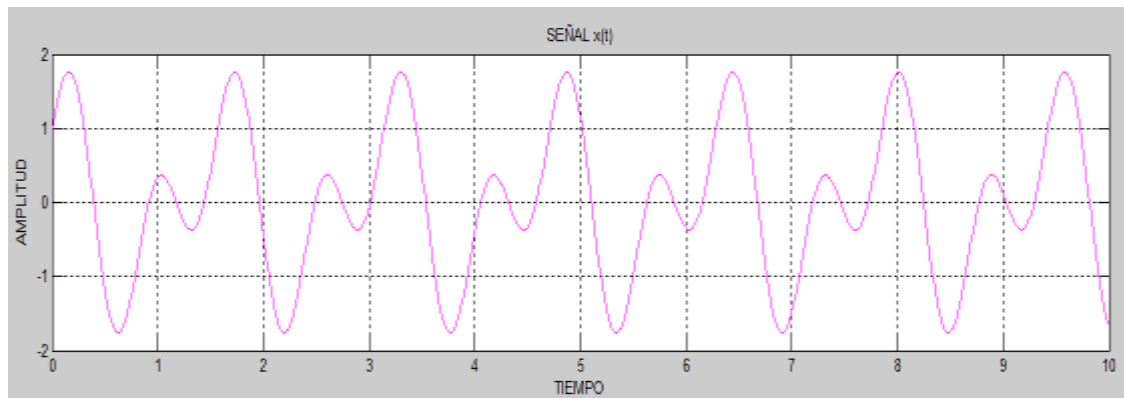
Solución

```
%Cuarto
w1=4;%Frecuencia angular primera función
T1=2*pi/w1;%Periodo de la primera función
w2=8;%Frecuencia angular segunda función
T2=2*pi/w2;%Periodo de la segunda función
```

```

T=T1/T2;%Periodo de la señal
t=0:0.01:10;% Vector tiempo
x=cos(4*t)+sin(8*t);%Función x(t)
plot(t,x,'m')% Graficar
grid%Colocar grilla a la grafica
title('SEÑAL x(t)')%Nombre de la señal
xlabel('TIEMPO')% Nombre del eje x del plano
ylabel('AMPLITUD')% Nombre del eje y del plano

```



FRACCIONES PARCIALES

EJERCICIO No. 1.

$$x(s) = \frac{2s^3 + 5s^2 + 3s + 6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

Solución

```

% Primero
num=[2 5 3 6];%Numerador de la función teniendo en cuenta su orden
den=[1 6 11 6];%Denominador de la función teniendo en cuenta su orden
[r,p,k]=residue(num,den)%r=raíces, p=polos y k=ganancia
r= -6.0000 -4.0000 3.0000

p= -3.0000 -2.0000 -1.0000

k= 2

```

O sea la respuesta es:

$$x(s) = -\frac{6}{s+3} - \frac{4}{s+2} + \frac{3}{s+1} + 2$$

EJERCICIO No.2.

$$x(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}$$

Solución

```
%segundo
num=[1 2 3];%Numerador de la función teniendo en cuenta su orden
den=[1 3 3 1];%Denominador de la función teniendo en cuenta su orden
[r,p,k]=residue(num,den)%r=raíces, p=polos y k=ganancia
r= 1 0 2

p= -1 -1 -1

k= []
```

O sea la respuesta es:

$$x(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{0}{(s+1)^2} + \frac{2}{(s+1)^3} = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^3}$$

TRANSFORMADA DE LAPLACE

EJERCICIO No. 1

$$x(t) = 2e^{-2t}\text{sen}(2t)$$

Solución

```
%Transformada de laplace
%primero
syms t% Variable
xt=2*exp(-2*t)*sin(2*t);% Ecuación a transformar
xs=laplace(xt)%Comando para hallar la transformada de laplace
```

$$xs = 4 / ((s + 2)^2 + 4)$$

EJERCICIO No. 2

Hallar el valor inicial de $x(t)$ si:

$$x(s) = \frac{2s + 1}{s^2 + s + 1}$$

Solución

Para hallar el valor inicial tenemos: $x(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$

```
%segundo
syms s % Variable
xs=(2*s+1)/(s^2+s+1); % Ecuación a transformar
sxs=s*xs; %Multiplicación de la ecuación por 's' para hallar el limite
x0=limit(sxs,s,inf) %Hallamos el limite según la definición de valor
inicial
```

$$x0 = 2$$

EJERCICIO No. 3

Hallar el valor final de $x(t)$ si:

$$x(s) = \frac{10(s + 1)}{s(s^2 + 4s + 3)}$$

Solución

Para hallar el valor inicial tenemos: $x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$

Y $s * x(s) = \frac{10(s+1)}{(s^2+4s+3)}$; entonces:

```
%tercero
n=[10 10]; % Numerador
d=[1 4 3]; % Denominador
sxs=tf(n,d); %Función s*x(s)
p=pole(sxs) %Polos de la función
if real(p)<0 %Condicional si los polos dan a la izquierda del plano
    [num,den]=tfdata(sxs,'v')
    sxs=poly2sym(num,'s')/poly2sym(den,'s')
    xfinal=limit(sxs,s,0)
else % Sino hacer
    disp('No es estable')
end %Final
```

$$p = -3 \quad -1$$

$$x_{\text{final}} = 10/3$$

EJERCICIO No. 4

Hallar el valor final de $x(t)$ si:

$$x(s) = \frac{10(s+1)}{s(s^2+4s-3)}$$

Solución

Para hallar el valor inicial tenemos: $x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$

Y $s * x(s) = \frac{10(s+1)}{(s^2+4s-3)}$; entonces:

```
% cuarto
n=[10 10];% Numerador
d=[1 2 -3];% Denominador
sxs=tf(n,d)%Función s*x(s)
p=pole(sxs)%Polos de la función
if real(p)<0 %Condicional si los polos dan a la izquierda del plano
    [num,den]=tfdata(sxs,'v')
    sxs=poly2sym(num,'s')/poly2sym(den,'s')
    xfinal=limit(sxs,s,0)
else% Sino hacer
    disp('No es estable')
end%Final
```

$$p = -3.0000 \quad 1.0000$$

No es estable

SOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Sistema LTI (Invariante en el tiempo)

EJEMPLO 1.27

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + 3\frac{d}{dt}x(t) + 2x(t) = 3$$

Condiciones iniciales: $x(0) = 0, x'(0) = 0$

Solución

$$x'' + 3x' + 2x = 3 \rightarrow 1$$

$$\mathcal{L}[x''(t)] = s^2x(s) - sx(0) - x'(0)$$

$$\mathcal{L}[x'(t)] = sx(s) - x(0)$$

Aplicamos laplace a (1)

$$[s^2x(s) - \cancel{sx(0)} - \cancel{x'(0)}] + 3[sx(s) - \cancel{x(0)}] + 2x(s) = \frac{3}{s}$$

$$s^2x(s) + 3sx(s) + 2x(s) = \frac{3}{s}$$

$$x(s)[s^2 + 3s + 2] = \frac{3}{s}$$

$$x(s) = \frac{3}{s(s^2 + 3s + 2)} = \frac{3}{s(s+1)(s+2)}$$

$$x(s) = \frac{a}{s} + \frac{b}{s+1} + \frac{c}{s+2}$$

$$a = \left[\frac{3}{(s+1)(s+2)} \right]_{s=0} = \frac{3}{2}$$

$$b = \left[\frac{3}{s(s+2)} \right]_{s=-1} = -3$$

$$c = \left[\frac{3}{s(s+1)} \right]_{s=-2} = \frac{3}{2}$$

$$x(s) = \frac{3}{2s} - \frac{3}{s+1} + \frac{3}{2(s+2)}$$

$$x(t) = \frac{3}{2} - 3e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t}$$

EJEMPLO 1.28

Resolver la ecuación diferencial

$$y'' + 5y' + 6y = 2x' + x(t)$$

Condiciones iniciales: $x(t) = u(t), y(0) = 1, y'(0) = 2$

Solución

Sacando LTI

$$[s^2y(s) - sy(0) - y'(0)] + 5[sy(s) - y(0)] + 6y(s) = 2[sx(s) - x(0)] + x(s)$$

$$[s^2y(s) - 1 - 2] + 5[sy(s) - 1] + 6y(s) = 2[sx(s) - 1] + x(s)$$

$$y(s)[s^2 + 5s + 6] = x(s)[2 + 1] + s + 5$$

$$y(s) = \frac{(2s+1)x(s)}{s^2+5s+6} + \frac{s+5}{s^2+5s+6}$$

$$x(t) = u(t) \rightarrow x(s) = \frac{1}{s}$$

$$y(s) = \frac{(2s+1)}{s(s^2+5s+6)} + \frac{s+5}{s^2+5s+6} = \frac{(2s+1)}{s((s+3)(s+2))} + \frac{s+5}{(s+3)(s+2)}$$

$$y(s) = \frac{A1}{s} + \frac{A2}{s+3} + \frac{A3}{s+2} + \frac{B1}{s+3} + \frac{B2}{s+2}$$

$$y(t) = A1 + A2e^{-3t} + A3e^{-2t} + B1e^{-3t} + B2e^{-2t}$$

$$y(t) = A1 + (A2+B1)e^{-3t} + (A3+B2)e^{-2t}$$

En MATLAB tendríamos:

TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

Hallar la transformada inversa de laplace de:

a).

$$X(S) = \frac{10(S+1)}{S^2 + 4S + 8}$$

```
% Transformada inversa laplace
% a) ._
syms s % lo colocamos para decir que es una variable virtual.
xs=10*(s+1)/(s^2+4*s+8); %esta es la función que deseamos transformar.
xt=ilaplace(xs)%comando para sacar la transformada inversa de la anterior
función.
```

Entonces tenemos que la transformada es:

$$x(t) = 5e^{-2t} (2\cos(2t) - \sin(2t))$$

b).

$$x(s) = \frac{15(s+3)}{s^2 + 4s + 3} e^{-2s}$$

```
% b) ._
syms s % lo colocamos para decir que es una variable simbólica.
xs=(15*exp(-2*s)*(s+3))/(s^2+4*s+3); %esta es la función que deseamos
transformar.
xt=ilaplace(xs) %comando para sacar la transformada inversa de la
anterior función.
```

Entonces tenemos que la transformada es:

$$x(t) = 15e^{-(t-2)}u(t-2)e^{-(t+2)}(-6e^{-3(t-2)} + 6e^{-3(t-2)})$$

O sea

$$x(t) = 15e^{-(t-2)}u(t-2)e^{-(t+2)}$$

```
%c) ._
```

```
syms t %lo colocamos para decir que es una variable simbólica.
xt=laplace(5*heaviside(t)) %comando para sacar la transformada inversa de
la anterior función.
```

Entonces tenemos que la transformada es:

$$x(t) = \frac{5}{s}$$

ECUACIONES DIFERENCIALES

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

a).

$$y'' + 2y' + 5y = 3; y(0) = 0, y'(0) = 0$$

```
% Ecuaciones diferenciales
%a:_
y=dsolve('D2y+2*Dy+5*y=3','y(0)=0','Dy(0)=0') %comando para la solución
de ecuaciones diferenciales y ecuación con sus respectivas condiciones
iniciales.
```

Entonces tenemos que la solución es:

$$y = -\frac{3}{10}e^{-t}\sin(2t) - \frac{3}{5}e^{-t}\cos(2t) + \frac{3}{5}$$

```
%b),
y=dsolve('Dy+5*y=3*exp(-2*t)','y(0)=-2') %comando para la solución de
ecuaciones diferenciales y ecuación con sus respectivas condiciones
iniciales.
```

Entonces tenemos que la solución es:

$$y = e^{-2t} - 3e^{-5t}$$

```
%c).-
y=dsolve('D2y+5*Dy+6*y=2*diff(heaviside(t),t)+heaviside(t)','y(0)=1','Dy(
0)=2') %comando para la solución de ecuaciones diferenciales y ecuación
con sus respectivas condiciones iniciales.
```

Entonces tenemos que la solución es:

$$y = 4e^{-2t} - 3e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{-t}(e^{2t} + 3)e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-t}(e^{3t} + 5)e^{-3t}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS 1

1. Determinar si la señal es periódica. Si así es hallar el periodo.

a). $x(t) = 4\cos(5\pi t + \frac{\pi}{4})$

b). $x(t) = 4u(t) + 2\operatorname{sen}(3t)$

c). $x(t) = \cos(4t) + \operatorname{sen}(2t)$

d). $x(n) = 4\cos(\pi n)$

e). $x(n) = 4\cos\left(0.5\pi n + \frac{\pi}{4}\right)$

f). $x(t) = 4\cos\left(3\pi t + \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(8\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$

2. Graficar las señales

a). $x(t) = \begin{cases} 0, & t < -4 \\ t + 2, & -4 \leq t < 3 \\ t - 2, & t \geq 3 \end{cases}$

b). $x(n) = \begin{cases} 0, & n < 2 \\ 2n - 4, & 2 \leq n < 4 \\ 4 - n, & n \geq 4 \end{cases}$

3. Usar Matlab para graficar $y(t) = x(t - 1)$ siendo:

a). $x(t)$ de la parte 2(a)

b). Graficar $y(n) = x(n + 1)$, siendo $x(n) = 2(b)$

c). Graficar 10 ciclos de la señal $x(t) = 4\cos\left(5\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$

4. Comprobar que el sistema descrito por la ecuación $y(t) = \frac{d}{dt}x(t) + x(t)$, es un sistema lineal e invariante en el tiempo.

5. La respuesta de un sistema LTI al paso unitario $x(t) = u(t)$ es:

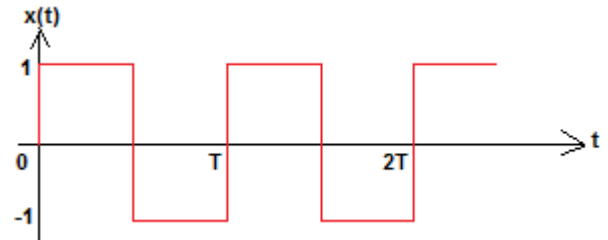
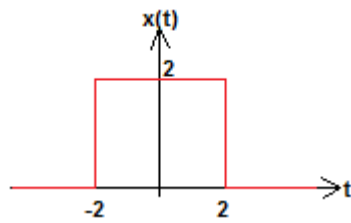
$$y(t) = (1 - e^{-2t})u(t)$$

Hallar la respuesta a la entrada $x(t) = 4u(t) - u(t - 1)$.

6. Hallar

a). La energía total

b). Potencia promedio



7. Hallar la componente par e impar de la señal:

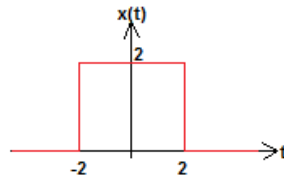
$$x(t) = \cos(t) + \sin(t) + \sin(t) \cos(t)$$

8. Determinar si el sistema con respuesta al impulso unitario:

$$h(t) = te^{-2t}u(t) + e^{3t}u(-t) + \delta(t - 1)$$

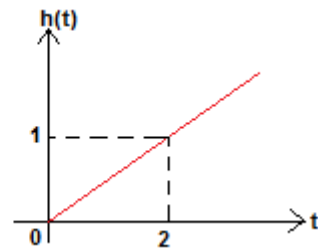
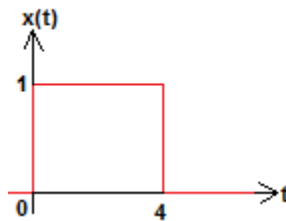
Es estable.

9. Dado $x(t)$ hallar $y(t) = x(3t - 2)$

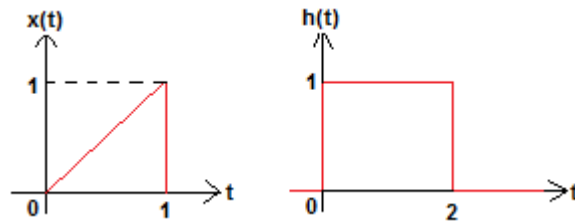


10. Resolver la Convolución $x(t) * h(t) = y(t)$

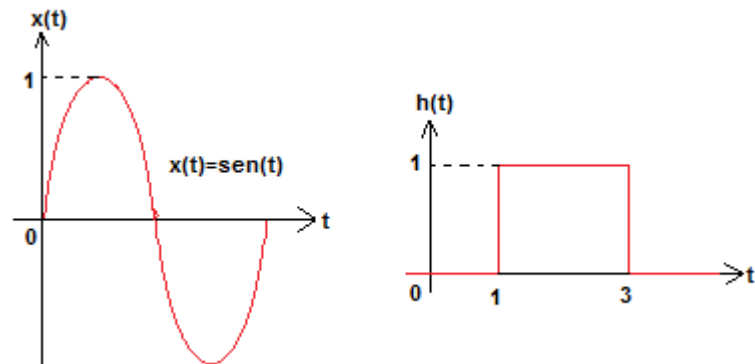
a.



b.



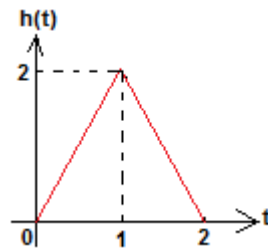
c.



d. Encontrar la respuesta de un sistema a una entrada $x(t) = 2u(t - 10)$, si la respuesta al impulso unitario $h(t) = \text{sen}(2t)u(t)$.

e. $h(t) = 2e^{-t}u(t)$, $x(t) = u(t) - (t - 4)$, $y(t) = ?$

f. Hallar $y(t)$, si $x(t) = u(t)$



Ejercicios: Transformada de Laplace

1. Calcular la Transformada de Laplace de las funciones:

a). $x(t) = 2u(t) + \delta(t - 4) - \cos(5t)$

b). $x(t) = tu(t) + 2(t - 2)u(t - 2)$

c). $x(t) = 5te^{-t}$

d). $x(t) = t\operatorname{sen}(t) + e^{-2t}$

e). $x(t) = \operatorname{sen}(2t) \cos(2t)$

f). $x(t) = e^{-0.4t} \cos(12t)$

g). $x(t) = \operatorname{sen}\left(4t + \frac{\pi}{3}\right)$

h). $x(t) = \cos(5t) \cos(3t)$

2. Hallar la transformada de Laplace inversa de:

a). $X(s) = \frac{s+1}{s(s^2+s+2)}$

b). $X(s) = \frac{5s+2}{(s+1)(s+2)^2}$

c). $X(s) = \frac{1}{s^2(s^2+16)}$

d). $X(s) = \frac{10(s+1)}{s^2+4s+3} e^{-2s}$

e). $X(s) = \frac{2s+100}{(s+1)(s+8)(s+10)}$

3. Solucionar la ecuación diferencial

a). $y'' + 3y' + 6y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$

b). $2y'' + 7y' + 3y = 0$; $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$

c). $y' + 3y = 4x(t)$; $x(t) = \cos(2t)$, $y(0) = -2$

d). $y'' + 4y' + 20y = 2x' - x$; $x(t) = u(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

e). $y'' + 9y' + 20y = x(t)$; $x(t) = 2u(t)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

4. Hallar la salida natural y forzada (Condiciones iniciales=0) de:

a). $y' + 3y = 4x(t)$; $x(t) = \cos(2t)$, $y(0) = -2$

b). $y' + 4y = 3x(t)$; $x(t) = \text{sen}(2t)$, $y(0) = 1$

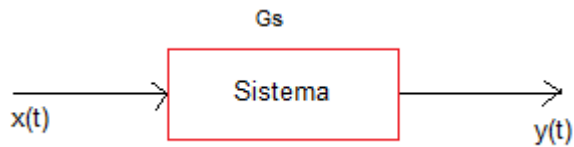
UNIDAD 2

FUNCION DE TRANSFERENCIA

Es un modelo matemático que expresa la interacción del sistema de la salida frente a la entrada.

REPRESENTACIÓN DE UN SISTEMA

- ✓ Ecuación diferencial.
- ✓ Ecuaciones de estado.
- ✓ Función de transferencia.



$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \rightarrow \text{Función de transferencia}$$

Condiciones iniciales iguales a cero (0).

Ejemplo:

Un sistema está representado por:

$$y''' - 3y'' + 4y' = 4x'' - 2x' + x$$

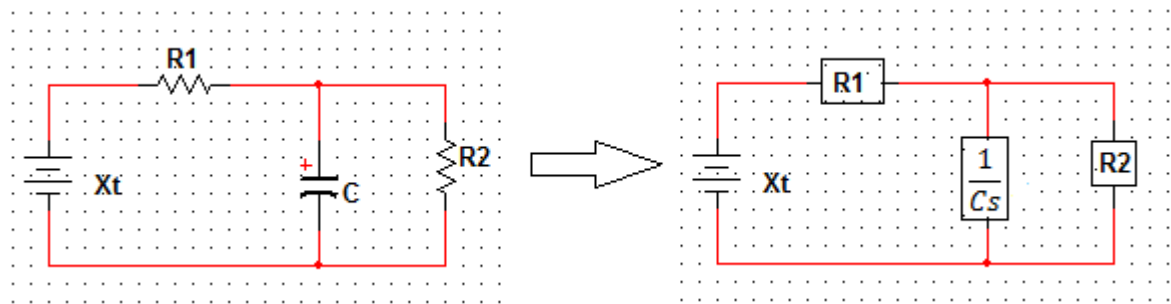
Trans. Laplace

$$S^3Y(s) - 3S^2Y(s) + 4SY(s) = 4S^2X(s) - 2SX(s) + X(s)$$

$$Y(s)[S^3 - 3S^2 + 4S] = X(s)[4S^2 - 2S + 1]$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{4S^2 - 2S + 1}{S^3 - 3S^2 + 4S}$$

Ejemplo



$$R_1 = R_2 = 1K\Omega; C = 100 \mu F$$

$$R_2 \parallel \frac{1}{Cs} = \frac{R_2}{1 + R_2Cs}$$

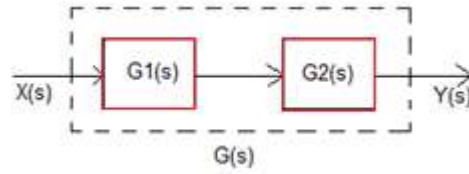
$$Y(s) = X(s) \frac{\frac{R}{1 + RCs}}{R + \frac{R}{1 + RCs}}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{R}{2R + R^2Cs}$$

$$G(s) = \frac{10^3}{2 * 10^3 + 10^6 * 10^{-4}s} = \frac{10}{s + 20}$$

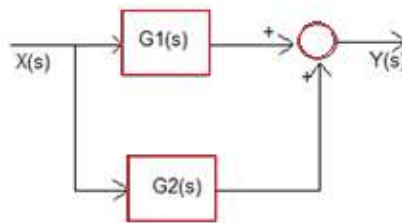
OPERACIÓN ENTRE SISTEMAS

1). Serie



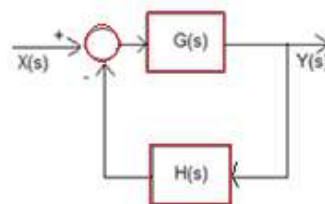
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = G1(s) * G2(s)$$

2). Paralelo



$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = G1(s) + G2(s)$$

3). Realimentado



$$E(s) = \text{Error}$$

$$Y(s) = G(s)E(s)$$

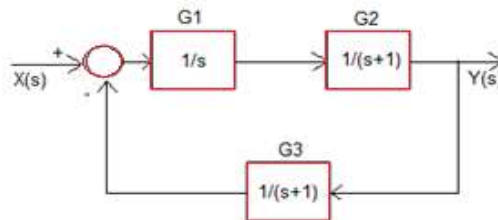
$$E(s) = X(s) - Y(s)H(s)$$

$$Y(s) = G(s)[X(s) - H(s)Y(s)]$$

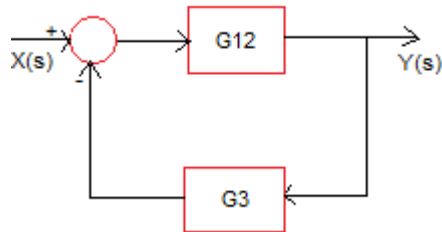
$$Y(s)[1 + G(s)H(s)] = G(s)X(s)$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = Glc(Ft\ lazo\ cerrado)$$

Ejemplo



$$G_{12} = \left(\frac{1}{s}\right)\left(\frac{1}{s+1}\right) = \frac{1}{s^2 + s}$$

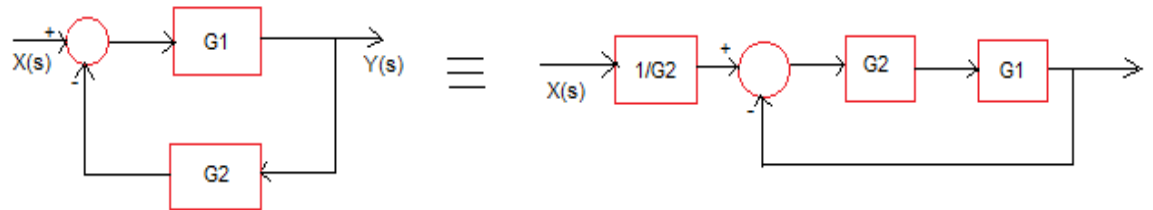


$$\frac{Y(s)}{X(s)} = G(s) = \frac{G_{12}}{1 + G_{12}G_3} = \frac{\frac{1}{s^2 + s}}{1 + \frac{1}{s^2 + s} * \frac{1}{s+2}} = \frac{\frac{1}{s^2 + s}}{1 + \frac{1}{(s^2 + s)(s+2)}} = \frac{\frac{1}{s^2 + s}}{\frac{(s^2 + s)(s+2) + 1}{(s^2 + s)(s+2)}}$$

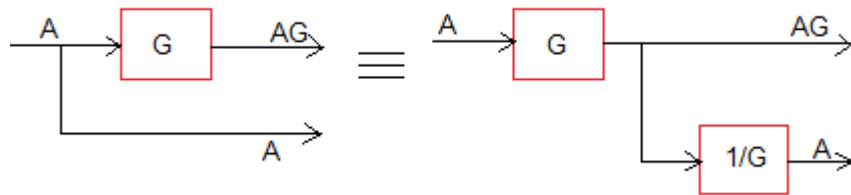
$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s+2}{(s^2 + s)(s+2) + 1} = \frac{s+2}{s^3 + 3s^2 + 2s + 1} \rightarrow \text{Orden 3}$$

Equivalencias

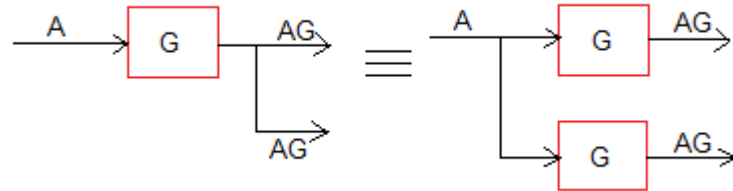
1.



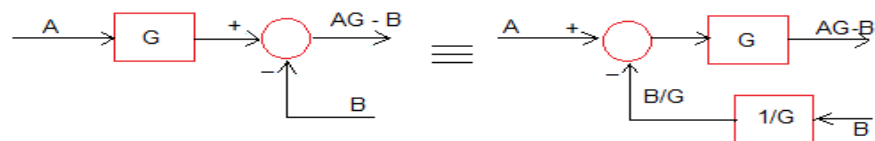
2.



3.

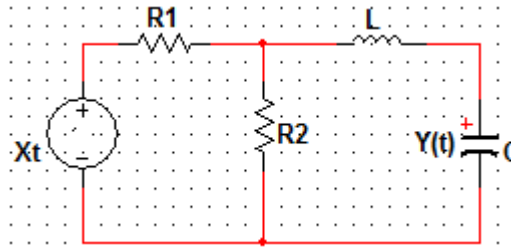


4.



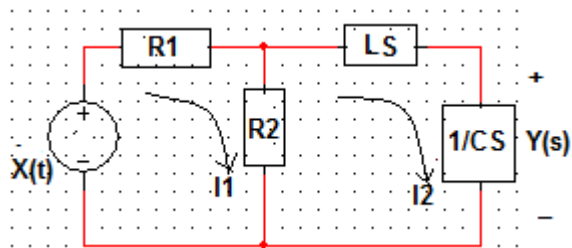
Ejemplo

Encontrar la función de transferencia del sistema:



$X(t)$ = Entrada, $Y(t)$ = Salida.

Remplazamos cada elemento por su transformada.



Tenemos:

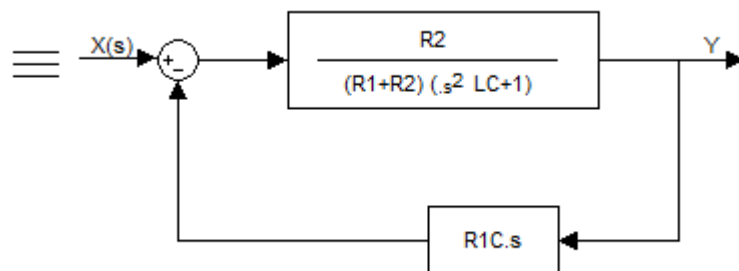
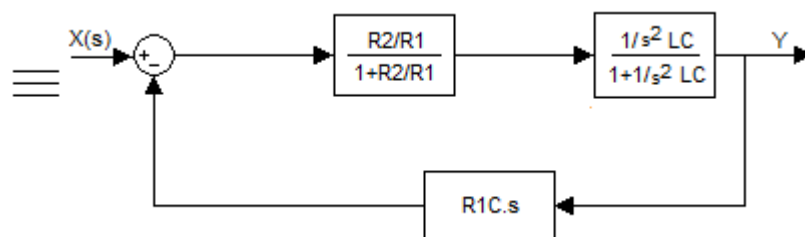
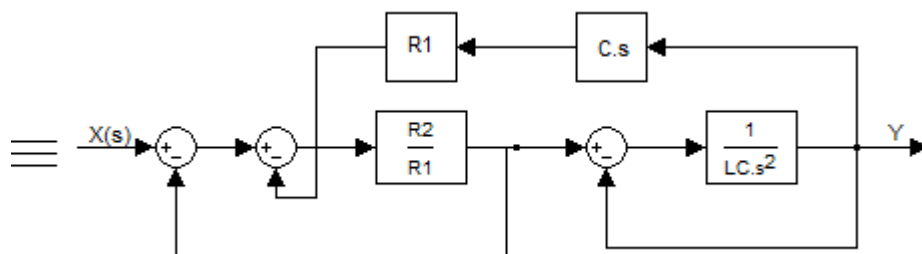
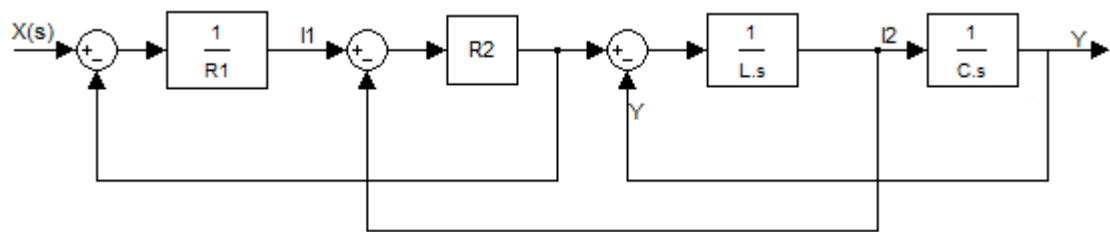
$$V_L = L \frac{di}{dt} \xrightarrow{\mathcal{L}} LS$$

$$V_C = \frac{1}{C} \int i dt \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{CS}$$

Ecuaciones:

- ✓ $X - V = R_1 I_1$
- ✓ $V = (I_1 - I_2) R_2$
- ✓ $V - Y = L S I_2$
- ✓ $Y = \frac{1}{CS} I_2$

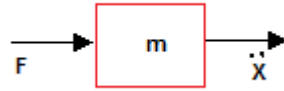
Diagrama en bloques:



$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\frac{R2}{(R1 + R2)(1 + s^2 LC)}}{1 + \frac{R2}{(R1 + R2)(1 + s^2 LC)} * R1Cs} = \frac{R2}{(R1 + R2)(1 + s^2 LC) + R2R1Cs}$$

Ahora vemos que, si se tiene:

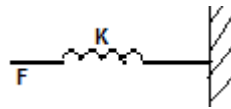
a.



$$F = m\ddot{x}$$

$$F(s) = ms^2X$$

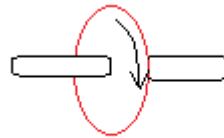
b.



$$F = kx$$

$$F(s) = KX(s)$$

c.



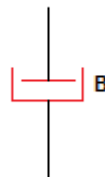
I= Inercia traslacional

$$\tau = I\ddot{\theta}$$

$$\tau(s) = Is^2\theta(s)$$

d.

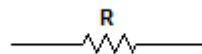
Amortiguador



$$F = B\dot{x}$$

$$F(s) = BsX(s)$$

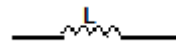
e.



$$V = Ri$$

$$V(s) = RI(s)$$

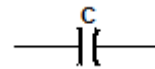
f.



$$V = L \frac{di}{dt}$$

$$V(s) = LsI(s)$$

g.



$$V = \frac{1}{C} \int i \, dt$$

$$V(s) = \frac{1}{Cs} I(s)$$

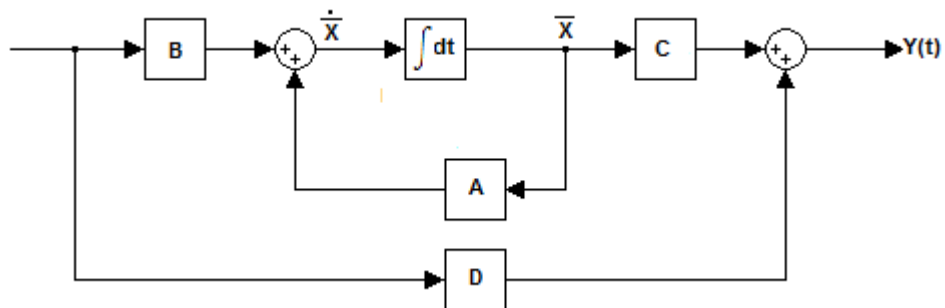
Modelo en espacio de estado

$$\dot{\bar{X}}(t) = A\bar{X}(t) + Bu(t)$$

$$Y(t) = C\bar{X}(t) + Du(t)$$

$$\bar{X}(t) = \text{Vector de estado} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{X}(t) = \begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \end{bmatrix} \quad u(t) = \text{Entrada}; y(t) = \text{Salida}$$



Ejemplo

Encontrar las ecuaciones de estado del sistema:

$$y'' + 2y' + 4y = 2u$$

Solución

Variables de estado

$$X_1 = y; \quad X_2 = y'$$

Ecuaciones de estado

$$1). \quad X'_1 = X_2$$

$$2). \quad X'_2 = -2X_2 - 4X_1 + 2$$

Ecuación de salida

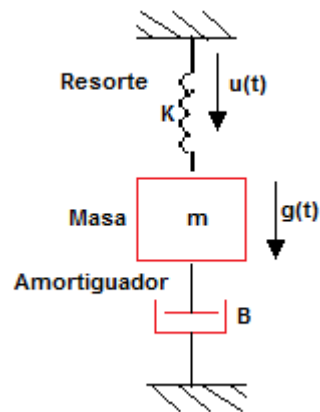
$$y(t) = X_1$$

Entonces:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Representar el sistema en ecuaciones de estado



Ecuación:

$$My'' + By' + Ky = u(t)$$

$$X_1 = y; \quad X_2 = y'$$

Ecuaciones de estado:

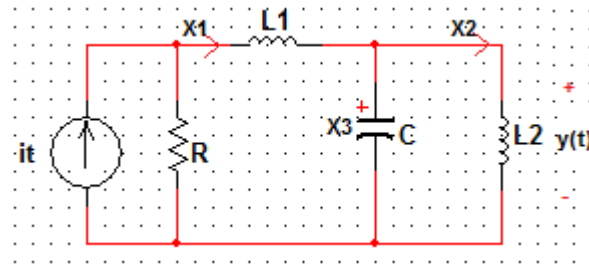
$$1). \dot{X}_1 = X_2$$

$$2). \dot{X}_2 = -\frac{K}{M}X_1 - \frac{B}{M}X_2 + \frac{u}{M}$$

Salida

$$y(t) = X_1$$

Ejemplo



Ecuaciones

$$1). L_1 \dot{X}_1 + X_3 + R(X_1 - i) = 0$$

$$2). L_2 \dot{X}_2 - X_3 = 0$$

$$3). X_1 = C \dot{X}_3 + X_2$$

Ecuaciones de estado

$$\dot{X}_1 = -\frac{X_3}{L_1} - \frac{R}{L_1}(X_1 - i)$$

$$\dot{X}_2 = \frac{X_3}{L_2}$$

$$\dot{X}_3 = \frac{X_1}{C} - \frac{X_2}{C}$$

Salida

$$y(t) = X_3$$

Ejemplo

Obtener el modelo del sistema en el espacio de estados

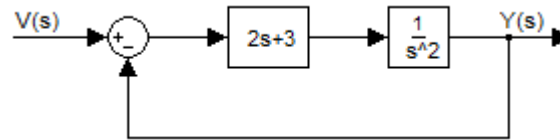
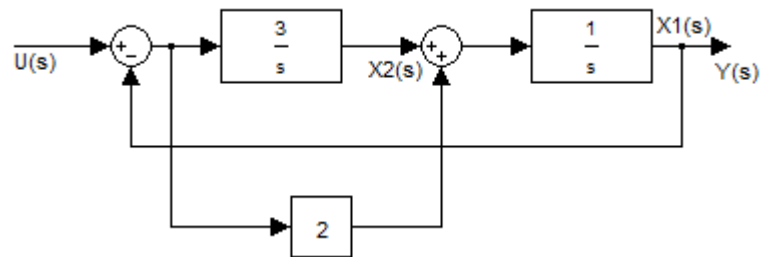


Diagrama en bloques → Espacio de estados

Función de transferencia en lazo abierto

$$G(s) = (2s + 3) * \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s} \left(2 + \frac{3}{s} \right)$$



Sistema de 2° orden → Dos variables de estado $X_1(t)$, $X_2(t)$.

$$X_1(s) = \frac{1}{s} [X_2 + 2(u - X_1)]$$

$$X_2(s) = \frac{3}{s} (u - X_1)$$

Salida

$$Y(s) = X_1(s)$$

1. $sX_1 = -2X_1 + X_2 + 2u$
2. $sX_2 = -3X_1 + 3u$

Aplicando $\int^{-1}$

1. $\dot{X}_1 = 2X_1 + X_2 + 2u$
2. $\dot{X}_2 = -3X_1 + 3u$

Salida

$$y(t) = X_1(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

Conversión entre funciones de transferencia y ecuaciones de estado

$$\dot{\bar{X}} = A\bar{X} + Bu$$

$$y = \underline{C}\bar{X} + \underline{D}u$$

Sacando transformada de Laplace

$$sX(s) = AX(s) + Bu(s)$$

$$Y(s) = CX(s) + Du(s)$$

$$X(s)[s - A] = Bu(s)$$

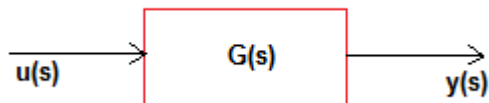
I: Matriz identidad

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X(s) = [sI - A]^{-1}Bu(s)$$

$$Y(s) = C[sI - A]^{-1}Bu(s) + Du(s)$$

$$\frac{Y(s)}{u(s)} = C[sI - A]^{-1}B + D$$



$$G(s) = C[sI - A]^{-1}B + D$$

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}; \quad D = 0$$

Solución

$$G(s) = [1 \quad 0] \left[\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

$$G(s) = [1 \quad 0] \left[\begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{k}{m} & s + \frac{b}{m} \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{k}{m} & s + \frac{b}{m} \end{bmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}} \begin{bmatrix} s + \frac{b}{m} & 1 \\ -\frac{k}{m} & s \end{bmatrix}$$

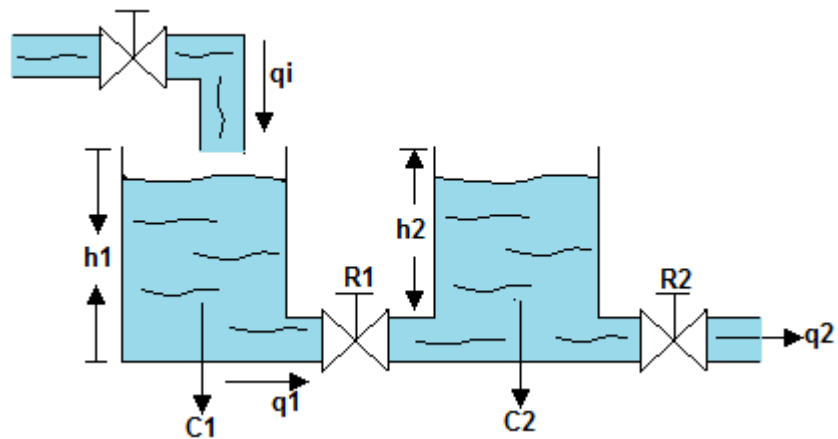
$$G(s) = \frac{[1 \quad 0]}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}} \begin{bmatrix} s + \frac{b}{m} & 1 \\ -\frac{k}{m} & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}} \begin{bmatrix} s + \frac{b}{m} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}} * \frac{1}{m}$$

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

Sistema Hidráulico



C: Capacidad hidráulica del tanque

R: Resistencia hidráulica de la válvula

q: Caudal (Volumen/Tiempo)

h: Altura

Ecuaciones Diferenciales

$$q_1 = \frac{h_1 - h_2}{R_1}$$

$$h_1 = \frac{1}{C_1} \int (q_i - q_1) dt$$

$$q_2 = \frac{h_2}{R_2}$$

$$h_2 = \frac{1}{C_2} \int (q_1 - q_2) dt$$

Ecuaciones de Laplace

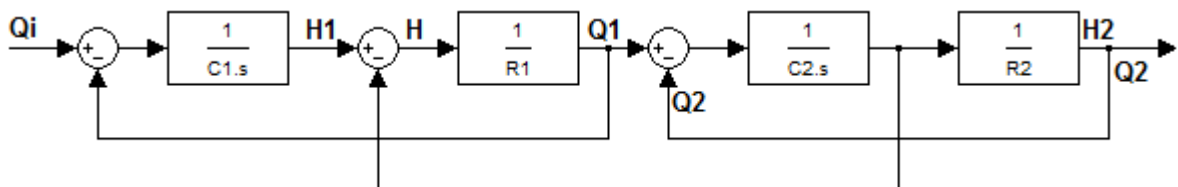
$$Q_1 = \frac{H_1 - H_2}{R_1}$$

$$H_1 = \frac{Q_i - Q_1}{C_1 s}$$

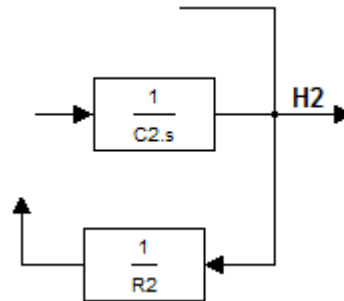
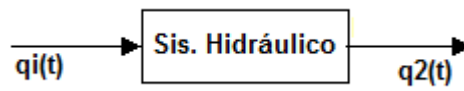
$$Q_2 = \frac{H_2}{R_2}$$

$$H_2 = \frac{Q_1 - Q_2}{C_2 s}$$

Diagrama de bloques

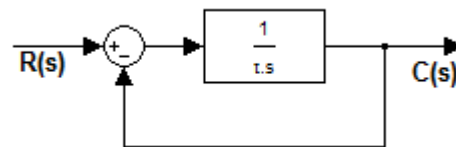


$$G(s) = \frac{Q_2(s)}{Q_i(s)}$$



Respuesta en el tiempo de un sistema

Sistema de primer orden



Función de transferencia en lazo abierto

$$G_{la}(s) = \frac{1}{\tau s}$$

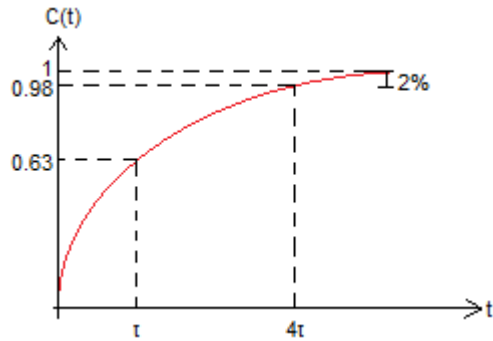
Función de transferencia en lazo cerrado

$$G_{lc}(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{1}{\tau s}}{1 + \frac{1}{\tau s}}$$

Realimentación unitaria

$$C(s) = \frac{1}{\tau s + 1} R(s)$$

a) Respuesta al escalón unitario



$$t = 0 \rightarrow C(t) = 0; \quad t = \infty \rightarrow C(t) = 1$$

$$r(t) = u(t)$$

$$R(s) = \frac{1}{s}$$

$$C(s) = \frac{1}{s(\tau s + 1)}$$

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/\tau}$$

$$C(t) = 1 - e^{-t/\tau}$$

$$t = \tau \rightarrow C(t) = 1 - e^{-\frac{\tau}{\tau}} = 1 - e^{-1} = 0.63 = 63\%$$

$$t = 4\tau \rightarrow C(t) = 1 - e^{-\frac{4\tau}{\tau}} = 1 - e^{-4} = 0.98 = 98\%$$

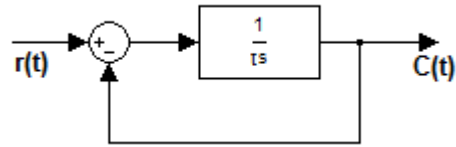
Ejemplo

Un termómetro es un sistema de 1° orden, si el 98% de la lectura definitiva la realizan en 10 min, ¿Cuál es la constante de tiempo?

$$4\tau = 10 \text{ min}$$

$$\tau = 2.5 \text{ min}$$

b) Respuesta a la rampa unitaria



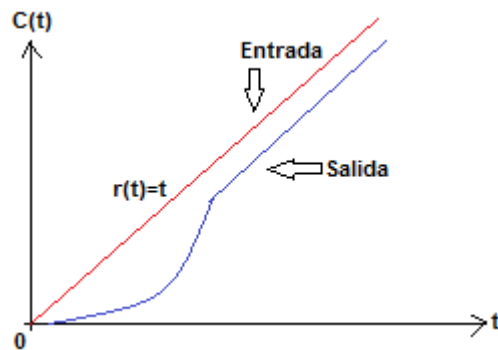
$$r(t) = t \rightarrow R(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$C(s) = \frac{1}{s^2(\tau s + 1)}$$

$$C(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{\tau^2}{\tau s + 1}$$

$$C(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{\tau}{s + 1/\tau}$$

$$C(t) = t - 1 + \tau e^{-t/\tau}$$

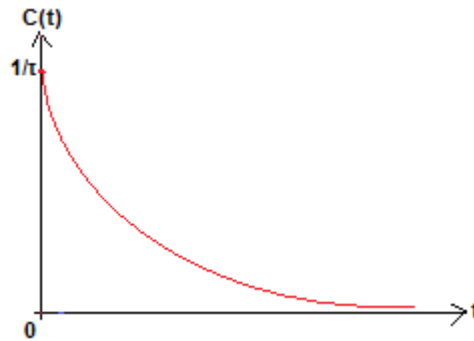


c) Respuesta al impulso unitario

$$\text{Entrada: } \delta(t) \rightarrow R(s) = 1$$

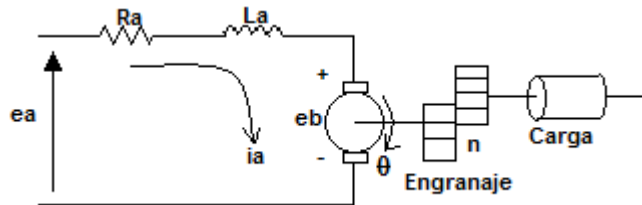
$$C(s) = \frac{1}{\tau s + 1} = \frac{1/\tau}{s + 1/\tau}$$

$$C(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \rightarrow \begin{cases} t = 0 \rightarrow C(t) = \frac{1}{\tau} \\ t = \infty \rightarrow C(t) = 0 \end{cases}$$



Respuesta en el tiempo de un sistema de segundo orden

Motor DC



n : Relación de velocidad

Ra : Resistencia inducida (motor)

La : Inductancia del inducido

θ : Desplazamiento angular

ea : Voltaje aplicado

eb : FCEM

J : Momento de inercia

b : Amortiguación

Ecuaciones

$$La \frac{dia}{dt} + Raia + eb = ea$$

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + b \frac{d\theta}{dt} = T = K_2 Ia ; T: Torque$$

Laplace

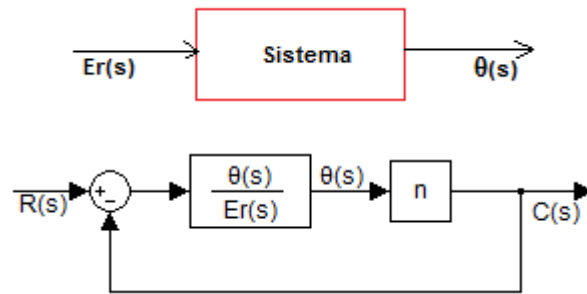
$$1). SLaIa + RaIa + KsS\theta = K_1 Er$$

$$2). S^2J\theta + bs\theta = K_2 Ia$$

$$eb = K_3 \frac{d\theta}{dt}$$

$$2). e^2 J \theta + b s \theta = K_2 I a = \frac{K_1 K_2 E r - K_2 K_3 s \theta}{s L a + R a}$$

$$\frac{\theta(s)}{E r(s)} = \frac{K_1 K_2}{s(J s + b)(L a s + R a) + K_2 K_3 s}$$



$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_1 K_2 n}{s[(L a s + R a)(J s + b) + K_2 K_3] + K_1 K_2 n}$$

En general: Sistema de segundo orden

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{J s^2 + B s + K}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K/J}{s^2 + \left(\frac{B}{J}\right)s + \frac{K}{J}}$$

$$\frac{K}{J} = \omega_n^2 \rightarrow \omega_n = \sqrt{K/J}$$

ω_n = Frecuencia natural no amortiguada

$$\frac{B}{J} = 2 \xi \omega_n$$

ξ = Tasa de amortiguamiento

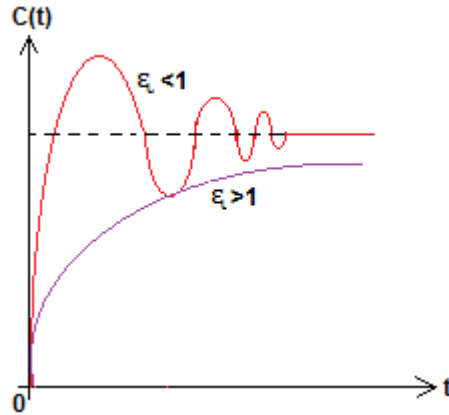
Función de transferencia de un sistema de 2° orden en lazo cerrado

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2 \xi \omega_n s + \omega_n^2}$$

$0 < \xi < 1$: Sistema subamortiguado

$\xi = 1$: Sistema críticamente amortiguado (oscilatorio)

$\xi > 1$: Sistema sobreamortiguado



Sistemas subamortiguados

Entrada: Escalón unitario $R(s) = 1/s$

$$e(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{1}{s} - \frac{s + 2\xi\omega_n}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$e(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + \xi\omega_n}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\xi\omega_n}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_d^2}$$

$$\omega_n^2 = \xi\omega_n^2 + \omega_d^2$$

ω_d : Frecuencia amortiguada

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

$$C(t) = 1 - e^{-\xi\omega_n t} \left[\cos\omega_d t + \frac{\xi\omega_n}{\omega_d} \text{sen}\omega_d t \right]$$

$$C(t) = 1 - e^{-\xi\omega_n t} \left[\cos\omega_d t + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \text{sen}\omega_d t \right]$$

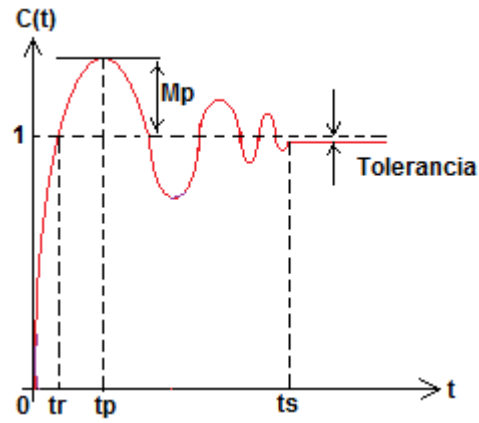
Características

tr: Tiempo de subida $C(t) = 1$

tp: Tiempo pico $C(t) \rightarrow \max$

ts: Tiempo de establecimiento $C(t) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \pm 2\% \text{ Tolerancia} \\ 1 \pm 5\% \text{ Tolerancia} \end{array} \right\}$

Mp: Sobrepico $\rightarrow C(t)$ max (*Overshoot*)



En matlab lo podemos apreciar y practicar de la siguiente forma:

FUNCION DE TRANSFERENCIA

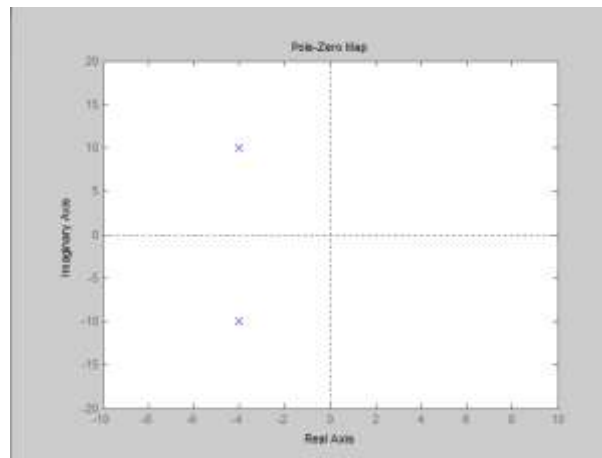
```
%% función de transferencia
% a).
num=[116] %numerador de la función
den=[1 8 116] %denominador de la función
Gs=tf(num,den) %comando para obtener la función de transferencia de la
función.
%b)._ POLOS Y CEROS
p=pole(Gs) %comando para hallar los polos de la función.
c=zero(Gs) %Comando para hallar los ceros de la función.

% GRAFICAR POLOS Y CEROS
pzmap(Gs) %Comando para graficar la ubicación de los polos y los ceros.
axis([-10 10 -20 20]) %comando para definir los límites de los ejes en la
grafica.
```

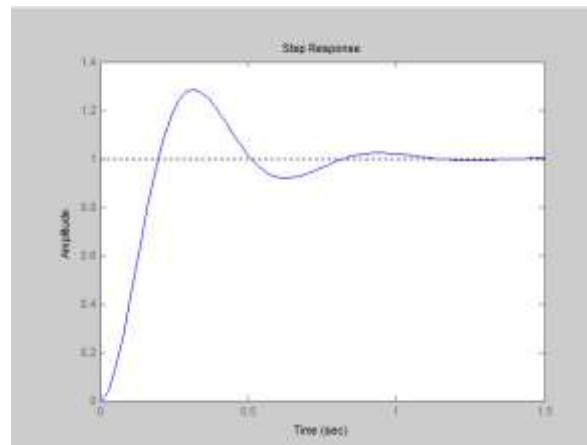
Obtenemos:

```
p =
-4.0000 +10.0000i
-4.0000 -10.0000i
```

```
c =
Empty matrix: 0-by-1
```



```
% c):_ Respuesta al paso unitario u(t)
step(Gs) %Comando que me muestra gráficamente el comportamiento del
sistema.
```



```
% d).
```

```
num=[12] %numerador de la función
den=[1 8 12] %denominador de la función
Gs=tf(num,den) %comando para obtener la función de transferencia de la
función.
```

```
%e)._ POLOS Y CEROS
```

```
p=pole(Gs) %comando para hallar los polos de la función.
c=zero(Gs) %Comando para hallar los ceros de la función.
```

```
% GRAFICAR POLOS Y CEROS
```

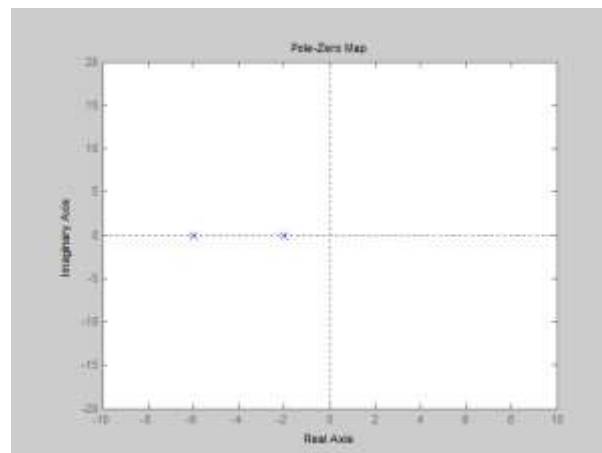
```
pzmap(Gs) %Comando para graficar la ubicación de los polos y los ceros.
```

```
axis([-10 10 -20 20]) %comando para definir los límites de los ejes en la grafica.
```

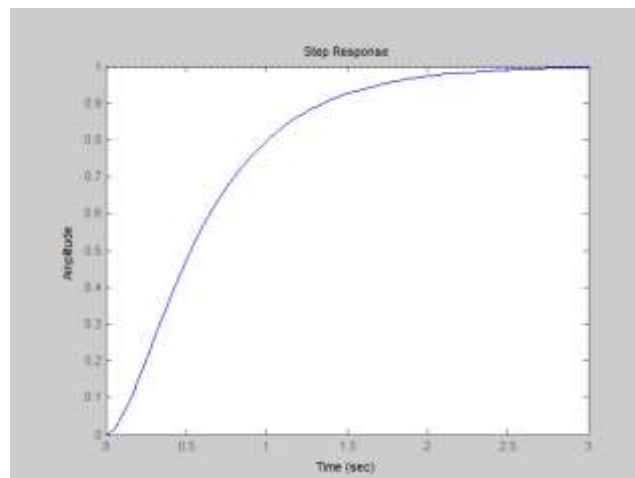
Obtenemos:

```
p = -6  
    -2
```

```
ceros = Empty matrix: 0-by-1
```



```
% f):_ Respuesta al paso unitario u(t)  
step(Gs) %Comando que me muestra gráficamente el comportamiento del sistema.
```



CONVERSION DE SISTEMAS

%%4). CONVERSION DE SISTEMAS!!!!!!

%a). DE FUNCION DE TRANSFERENCIA A ECUACION DE ESTADO

```
num=[4 12]; %numerador de la función
den=[1 5 12]; %denominador de la función
Gs=tf(num,den); %comando para obtener la función de transferencia de la
función.
[A,B,C,D]=tf2ss(num,den) %comando para pasar de función de transferencia a
ecuaciones de estado
```

Obtenemos como resultado:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -12 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 12 \end{bmatrix}$$

$$D = 0$$

O sea:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -12 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 4 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \overset{0}{\cancel{D}} u(t)$$

%b). DE ECUACION DE ESTADO A FUNCION DE TRANSFERENCIA

```
A=[1 2;4 -1]; %Valor de a en la ecuación de estado
B=[0; 1]; %Valor de b en la ecuación de estado
C=[0 1]; %Valor de c en la ecuación de estado
D=0; %Valor de d en la ecuación de estado
[num,den]=ss2tf(A,B,C,D) %Comando para pasar de ecuaciones de estado a
función de transferencia.
```

Gs=tf(num,den) %expresa como función de transferencia la respuesta anterior.

Obtenemos como resultado:

num = 0 1 -1

den = 1 0 -9

Transfer function:

$s - 1$

$s^2 - 9$

O sea:

$$y = \frac{s - 1}{s^2 - 9}$$

1. FUNCION DE TRANSFERENCIA

- Respuesta al paso unitario

$$\frac{c(s)}{R(s)} = \frac{10}{s^2 + 2s + 10} \quad \text{"LAZO ABIERTO"}$$

```
num=10; %Coeficientes del Numerador
den=[1 2 10]; % Coeficientes del Denominador
g=tf(num,den) % Generar la función de transferencia
t=0:0.01:10; % Vector tiempo
c=step(g,t); % paso
plot(t,c) % Graficar
grid % Grilla

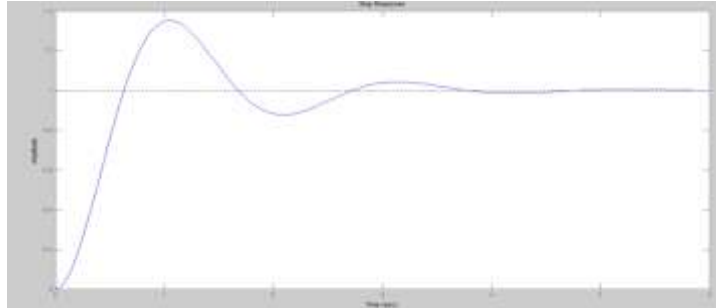
%Podemos reemplazar el c=step(g,t) y el plot COMO step(g)
step(g) % Paso
```

El código anterior nos genera:

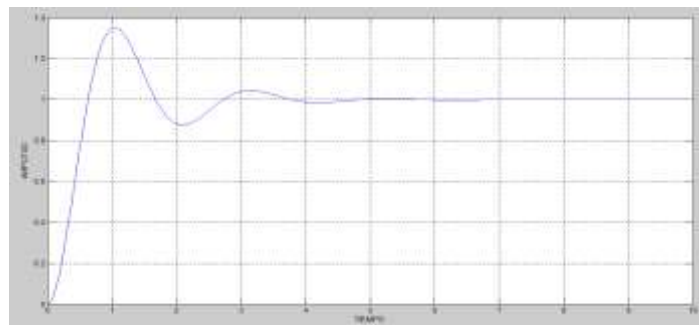
Transfer function:

$$\frac{10}{s^2 + 2s + 10}$$

Utilizando **step (g)**



Utilizando **plot (t,c)**



- Respuesta a la rampa unitaria

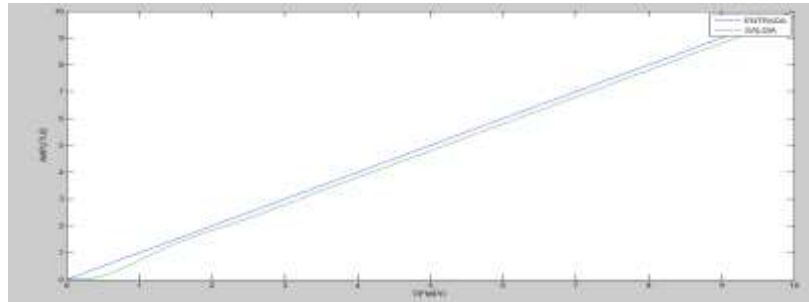
La variable **g** que utilizamos aquí, es la que fue generada en el punto anterior.

```
gr=g*tf(1,[1 0]) %nos genera la nueva función de transferencia
t=0:0.01:10; % Vector Tiempo
c=step(gr,t); % Paso
plot(t,t,t,c) % Graficar
legend('ENTRADA','SALIDA')
```

El código nos genera:

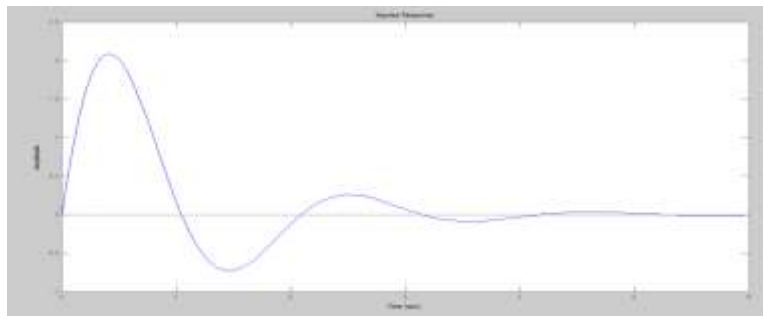
Transfer function:
10

$$s^3 + 2s^2 + 10s$$



- Respuesta al impulso unitario:

`impz(g)` % Grafica el impulso con la función utilizada en los ejercicios anteriores



2. ECUACIONES DE ESTADO

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} \mu$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

```
A=[-1 -0.5; 1 0]; % Matriz A
B=[0.5; 0]; % Matriz B
C=[1 0]; % Matriz C
D=0; % Matriz D
% Convertir a función de transferencia
```

```

[num,den]=ss2tf(A,B,C,D) %convertir a función de transferencia
g=tf(num,den) % función de transferencia
t=0:0.01:10; % Vector tiempo
step(g) % Paso

%%Respuesta a la rampa unitaria

gr=g*tf(1,[1 0]) ; % Genera la nueva función de transferencia
t=0:0.01:10; % Vector tiempo
c=step(gr,t); % Paso
plot(t,t,t,c) % Graficar
legend('ENTRADA','SALDIA')

% Respuesta al impulso

impulse(g) % Impulso

```

El programa nos genera:

g=

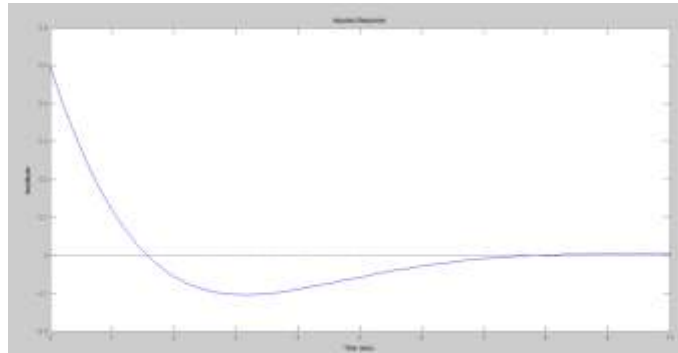
Transfer function:

$$\frac{0.5 s + 1.665e-016}{s^2 + s + 0.5}$$

gr=

Transfer function:

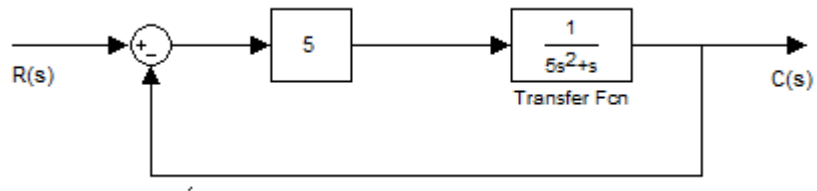
$$\frac{0.5 s + 1.665e-016}{s^3 + s^2 + 0.5 s}$$



3. COMPARAR TIEMPOS DE RESPUESTA SEGUN CONTROLADOR

%3:_ Compara tiempos de respuesta según controlador

SISTEMA 1



```
%Sistema 1 : Control proporcional
g1=5*tf(1,[5 1 0]); % Multiplicación de la ganancia por la función de
transferencia
gc1=feedback(g1,1) ; % Retroalimentación o "Lazo cerrado"
t=0:0.01:10; % Vector tiempo
c1=step(gc1,t); % Respuesta al escalón
```

Respuesta del programa

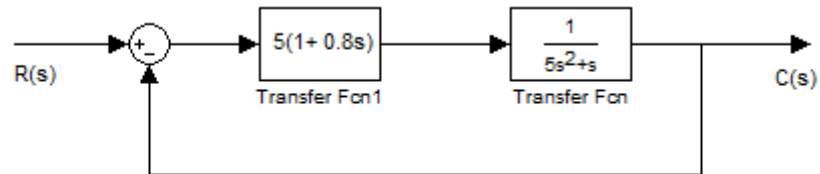
g1=

$$\frac{5}{5s^2 + s}$$

gc1=

$$\frac{5}{5s^2 + s + 5}$$

SISTEMA 2

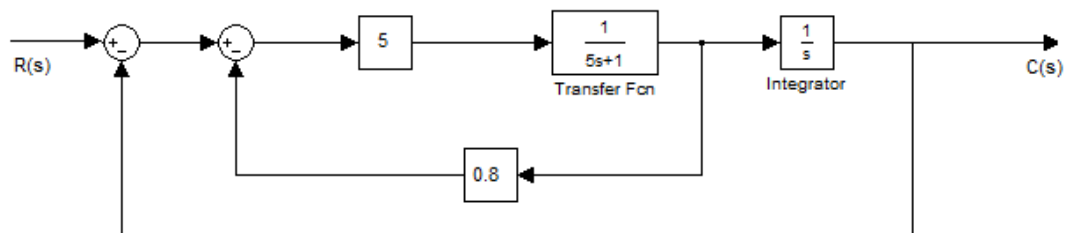


```
%Sistema 2 : Control proporcional derivado
g21=tf([4 5],1) %Genera la primera función de transferencia
g22=tf(1,[5 1 0]) %Genera la segunda función de transferencia
g2=g21*g22; % Multiplica las dos respuestas anteriores ya que se
encuentran en serie
gc2=feedback(g2,1); %Retroalimentación o "Lazo cerrado"
c2=step(gc2,t); % Respuesta al escalón
```

Respuesta del programa

```
g21=
              4 s + 5
g22=
              1
          -----
        5 s^2 + s
g2=
              4 s + 5
          -----
        5 s^2 + s
```

SISTEMA 3



```
%Sistema 3 : Control proporcional con realimentación de velocidad
g31=5*tf(1,[5 1]) % Multiplicación de la ganancia por la función de
transferencia
```

```

g32=feedback(g31,0.8) % Retroalimentación o "Laso cerrado"
g33=g32*tf(1,[1 0]) % Multiplica las dos respuestas anteriores ya que se
encuentran en serie
gc3=feedback(g33,1); % Retroalimentación o "Laso cerrado"
c3=step(gc3,t); % Respuesta al escalón
plot(t,c1,t,c2,t,c3) % Grafica de la respuesta de los tres sistemas
legend('SIST 1','SIST 2','SIST 3')

```

Respuesta del programa

g31=

$$\frac{5}{5s + 1}$$

g32=

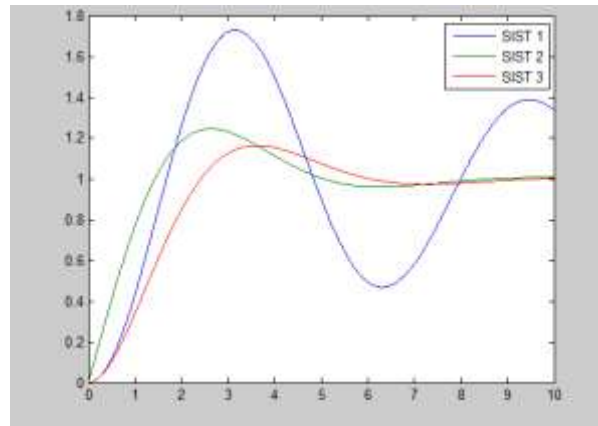
$$\frac{5}{5s + 5}$$

g33=

$$\frac{5}{5s^2 + 5s}$$

gc3=

$$\frac{5}{5s^2 + 5s + 5}$$



3. CALCULOS CARACTERISTICOS

$$G(S) = \frac{10}{s(s+2)(s+3)} \quad \text{"LAZO ABIERTO"}$$

Hallar: tr, tp, Mp, ts

```
%4:_ Calculo de características

g=zpk([], [0 -2 -3], 10) % Ceros, Polos y Ganancia
gc=feedback(g,1) % Realimentación "Lazo cerrado"
t=0:0.001:10; % Vector tiempo
y=step(gc,t); % Respuesta al escalón

%tiempo de salida
r=1;
while y(r)<1.0
    r=r+1
end
tr=(r-1)*0.001

%tiempo pico:tp
[ymax,n]=max(y)
tp=(n-1)*0.001

%Sobrepico:Mp
Mp=ymax-1

%tiempo de asentamiento:ts
```

```

tol=0.02; % Tolerancia del 2%
i=10/0.001;
while y(i)>=(1-tol) & y(i)<=(1+tol)
    i=i-1;
end
ts=i*0.001

```

Tener en cuenta: En ts, para el programa comienza a ejecutarse en últimos valores del tiempo, y se va regresando hasta donde la tolerancia es del 2%.

El programa nos genera:

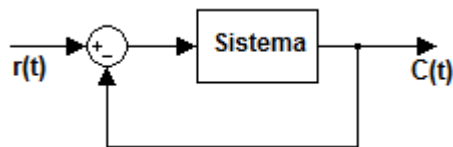
tr= 1.4980

tp = 2.3600

Mp = 0.3727

ts = 9.0790

Respuesta Transitoria



$$C(t) = 1 - e^{-\xi\omega_n t} \left[\cos\omega_d t + \frac{\xi}{1 - \xi^2} \sin\omega_d t \right]$$

a) Tiempo de subida tr

$$C(t) = 1 \rightarrow t = tr$$

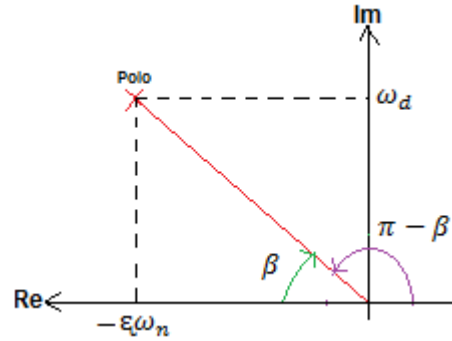
$$\cos\omega_d tr + \frac{\xi}{1 - \xi^2} \sin\omega_d tr = 0$$

$$\tan\omega_d tr = -\frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} = -\frac{\omega_d}{\xi\omega_n}$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

$$tr = \frac{1}{\omega_d} \tan^{-1} - \frac{\omega_d}{\xi \omega_n}$$

Observando la gráfica y remplazando tenemos



$$\tan^{-1} - \frac{\omega_d}{\xi \omega_n} = \pi - \beta$$

$$tr = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$$

b) Tiempo de pico: t_p

$C(t) \rightarrow \text{Máximo}$

$$\frac{dC(t)}{dt} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{dc}{dt} = \omega_n \xi e^{-\xi \omega_n t p} \left[\cos \omega_d t p + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \text{sen} \omega_d t p \right] + \dots \\ - e^{-\xi \omega_n t p} \left[-\omega_d \text{sen} \omega_d t p + \frac{\xi \omega_d}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cos \omega_d t p \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{dc}{dt} = \text{sen} \omega_d t p = 0$$

$$\omega_d t p = 0, \pi, 2\pi, \dots \rightarrow t p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

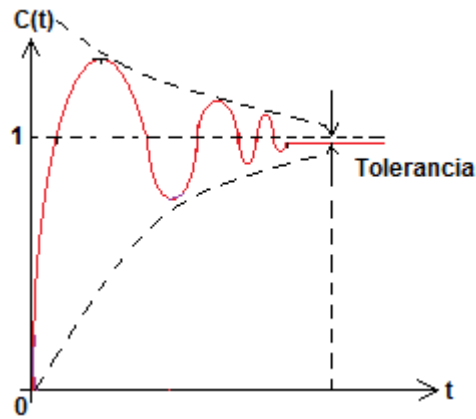
c) Sobrepico (overshoot): M_p

$$M_p = C(t_p) - 1 ; t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

$$Mp = -e^{-\xi\omega_n\left(\frac{\pi}{\omega_d}\right)} \left[\cos\pi + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\pi \right]$$

$$Mp = -e^{-\xi\omega_n\left(\frac{\pi}{\omega_d}\right)} \rightarrow Mp = e^{-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\pi}$$

d) Tiempo de asentamiento (setting): t_s



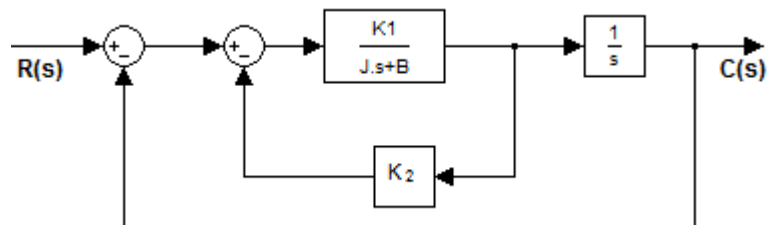
- Tolerancia del 2%

$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n}$$

- Tolerancia del 5%

$$t_s = \frac{3}{\xi\omega_n}; \tau = \frac{1}{\xi\omega_n}$$

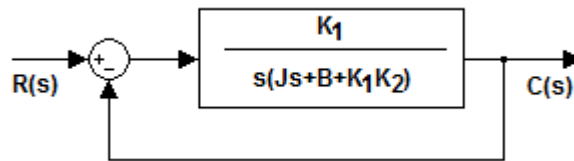
Ejemplo



Si $J = 1$; $B = 1$; hallar K_1 y K_2 Para que $Mp = 0.2$ y $t_p = 1 \text{ seg.}$

Solución

Función de transferencia en lazo cerrado



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_1}{Js^2 + s(B + K_1K_2) + K_1}$$

$$0.2 = e^{\frac{-\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\pi} \rightarrow \xi = 0.456; \text{ Despejada aplicando Ln a ambos lados}$$

$$t_p = 1 = \frac{\pi}{\omega_d} \rightarrow \omega_d = 3.14 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}; \text{ Frecuencia natural amortiguada}$$

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{3.14}{\sqrt{1-0.456^2}} = 3.53 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}; \text{ Frecuencia natural no amortiguada}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_1/J}{s^2 + s\left(\frac{B + K_1K_2}{J}\right) + \frac{K_1}{J}}$$

$$\omega_n^2 = \frac{K_1}{J} \rightarrow J = 1 \rightarrow \omega_n^2 = K_1$$

$$K_1 = (3.53)^2 \rightarrow K_1 = 12.5$$

$$2\xi\omega_n = \frac{B + K_1K_2}{J}$$

$$B = 1 \rightarrow 2(0.456)(3.53) = 1 + 12.5K_2$$

$$K_2 = 0.178$$

Ahora

$$tr = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$$

$$\beta = \tan^{-1} \frac{\omega_d}{\xi \omega_n} = \tan^{-1} \frac{3.14}{(0.456)(3.53)} = 1.10$$

$$tr = \frac{3.14 - 1.10}{3.14} = 0.65 \text{ seg}$$

Luego tenemos tolerancia del 2%:

$$ts(2\%) = \frac{4}{\xi \omega_n} = \frac{4}{(0.456)(3.53)}$$

$$ts = 2.48 \text{ seg}$$

Si tenemos tolerancia de 5 %:

$$ts(5\%) = \frac{3}{\xi \omega_n} = \frac{3}{(0.456)(3.53)}$$

$$ts = 1.86 \text{ seg}$$

Ejemplo

Graficar la posición de los polos y determinar ξ y ω_n

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 16} \text{ (Lazo cerrado)}$$

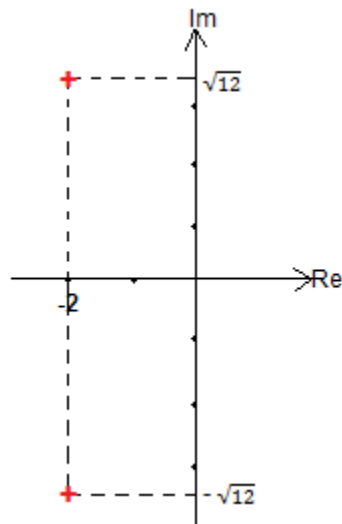
$$\omega_n^2 = 16 \rightarrow \omega_n = 4$$

$$2\xi\omega_n = 4 \rightarrow \xi = \frac{4}{2\omega_n} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$s^2 + 4s + 16 = 0 = (s + 2)^2 + 12 \rightarrow (s + \xi\omega_n)^2 + \omega_d^2$$

Entonces tenemos los polos en:

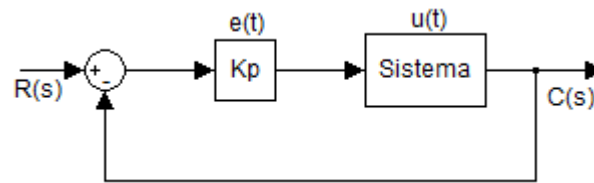
$$p = (-2, \pm\sqrt{12})$$



Acciones básicas de control

Para cumplir con las características o parámetros (t_p , t_r , M_p , t_s) en un sistema en lazo cerrado se adicionan al sistema o planta controladores, los más utilizados son:

a) Control proporcional: K_p



Básicamente K_p es un amplificador de ganancia ajustable

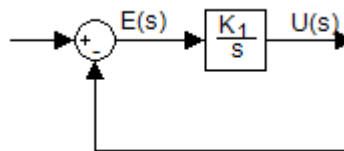
$e(t) = \text{Señal de error}$

$$e(t) = r(t) - c(t)$$

$$u(t) = K_p e(t)$$

$$K_p = \frac{U(s)}{E(s)}$$

b) Control integral:



$u(t) = \text{Salida a controlar}$

$$u(t) = K_1 \int e(t) dt$$

$$U(s) = \frac{K_1 E(s)}{s}$$

$$\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_1}{s}$$

c) Control proporcional integral: PI

$$u(t) = Kp e(t) + \frac{Kp}{Ti} \int e(t) dt$$

$$U(s) = KpE(s) + \frac{Kp}{Tis} E(s)$$

$$\frac{U(s)}{E(s)} = Kp + \frac{Kp}{Tis}$$

d) Control proporcional derivativo: PD

$$u(t) = Kp e(t) + KpTd \frac{de(t)}{dt}$$

$$U(s) = KpE(s) + KpTd s E(s)$$

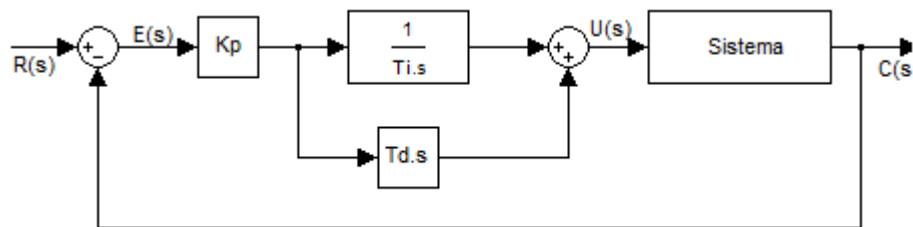
$$\frac{U(s)}{E(s)} = Kp(1 + Td \cdot s)$$

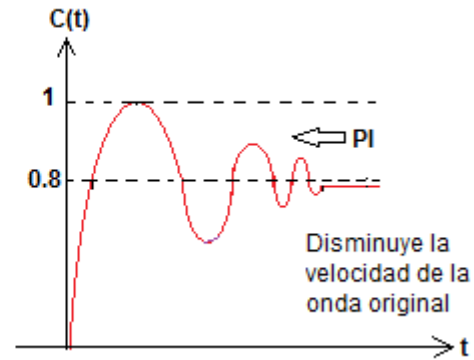
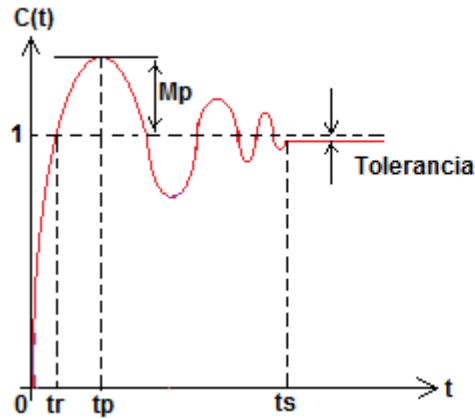
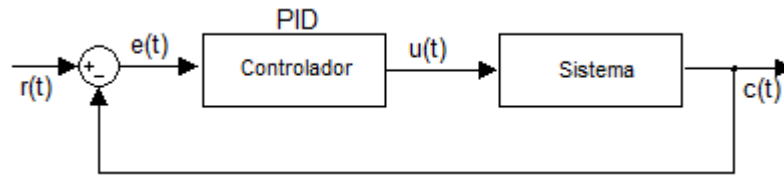
e) Control proporcional integral derivativo: PID

$$u(t) = Kp e(t) + \frac{Kp}{Ti} \int e(t) dt + KpTd \frac{de(t)}{dt}$$

$$U(s) = KpE(s) + \frac{Kp E(s)}{Ti} \frac{1}{s} + KpTd \cdot s E(s)$$

$$\frac{U(s)}{E(s)} = Kp + \frac{Kp}{Tis} + KpTds = Kp(1 + \frac{1}{Tis} + Tds)$$

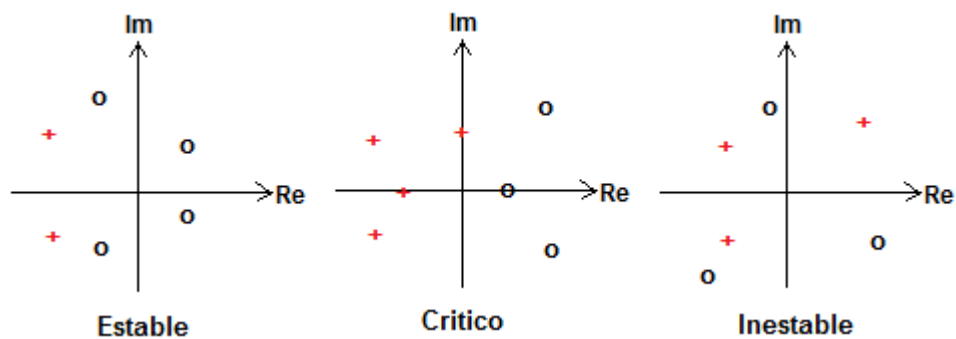




- Si la subida es lenta se aplica un PD

Estabilidad del sistema

1. Un sistema es estable si los polos del sistema en lazo cerrado están en el semiplano izquierdo
2. Es inestable si por lo menos un polo aparece en el semiplano derecho.
3. Es críticamente estable si los polos están en el semiplano izquierdo y por lo menos un polo está en el eje imaginario.
4. Los ceros no intervienen en la inestabilidad.



Error en estado estable



$$E(s) = R(s) - C(s)$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

$$\frac{E(s)}{R(s)} = 1 - \frac{C(s)}{R(s)} = 1 - \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s)}$$

$$E(s) = \frac{R(s)}{1 + G(s)}$$

e_{ss} : Error en estado estacionario

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$$

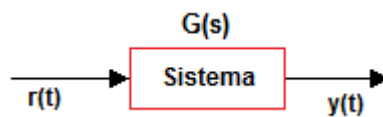
$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot R(s)}{1 + G(s)}$$

Si la entrada $r(t) = u(t)$ Escalón unitario

$$R(s) = \frac{1}{s}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G(s)}$$

Respuesta en frecuencia



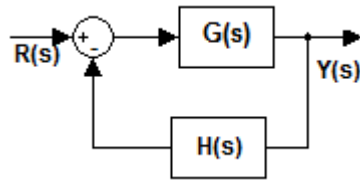
$$r(t) = R \sin(\omega_0 t)$$

$$y(t) = Y \sin(\omega_0 t + \phi)$$

$$Y(s) = G(s)R(s)$$

$$Y(j\omega) = G(j\omega)R(j\omega)$$

$$Glc = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)H(j\omega)}$$



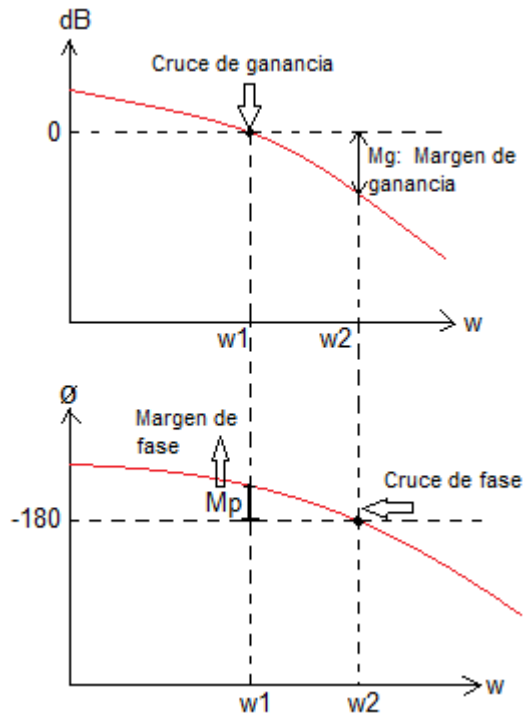
$$|Glc(j\omega)| = \frac{|G(j\omega)|}{|1 + G(j\omega)H(j\omega)|} \text{ (magnitud)}$$

$$\angle Glc(j\omega) = \angle G(j\omega) - \angle 1 + G(j\omega)H(j\omega) \text{ (Fase)}$$

Diagrama de Bode

Las respuestas en frecuencia del sistema en lazo abierto de la magnitud y la fase.

$$Magnitud = 20 \log |G(j\omega)|$$



Estabilidad: Mg por debajo de la línea de 0 dB y Mp por encima de la línea de -180°

Ejemplo

Un sistema tiene función de transferencia en lazo abierto:

$$G(s) = \frac{K}{s(s^2 + s + 4)}$$

a) Hallar el valor de K para que $Mp = 50^\circ$

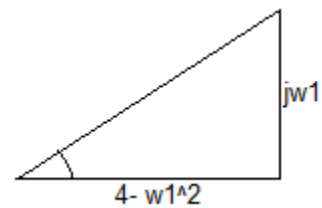
Para $\omega = \omega_1$

$$G(j\omega_1) = \frac{K}{j\omega_1[-\omega_1^2 + j\omega_1 + 4]}$$

Tenemos que:

$$\frac{A(s)}{B(s)} \rightarrow \theta = \angle A(s) - \angle B(s)$$

Entonces:



$$\angle G(j\omega_1) = -j\omega_1 - \angle 4 - \omega_1^2 + j\omega_1$$

$$\angle G(j\omega_1) = -90^\circ - \tan^{-1} \frac{\omega_1}{4 - \omega_1^2} = -130^\circ \rightarrow -180^\circ + 50^\circ$$

$$\tan^{-1} \frac{\omega_1}{4 - \omega_1^2} = 40^\circ$$

$$\tan 40^\circ = \frac{\omega_1}{4 - \omega_1^2} = 0.839$$

$$\omega_1 = 0.839(4) - 0.839(\omega_1^2)$$

$$\omega_1 = 1.49 \text{ rad/seg}$$

$$\omega = \omega_1 = 1.49 \rightarrow |G(j\omega)| = 1; 0 \text{ dB, equivalencia de } M_p \text{ en } M_g$$

$$|G(j\omega_1)| = \frac{K}{|j(1.49)(-2.22 + j(1.49) + 4)|} = 1$$

$$1 = \frac{K}{1.49 \sqrt{(4 - 2.22)^2 + 1.49^2}} \rightarrow K = 3.46$$

b) Hallar el M_g

$$\angle G(j\omega_2) = -180^\circ = -90^\circ - \tan^{-1} \frac{\omega_2}{4 - \omega_2^2}$$

$$\tan(90^\circ) = \frac{\omega_2}{4 - \omega_2^2} = \infty$$

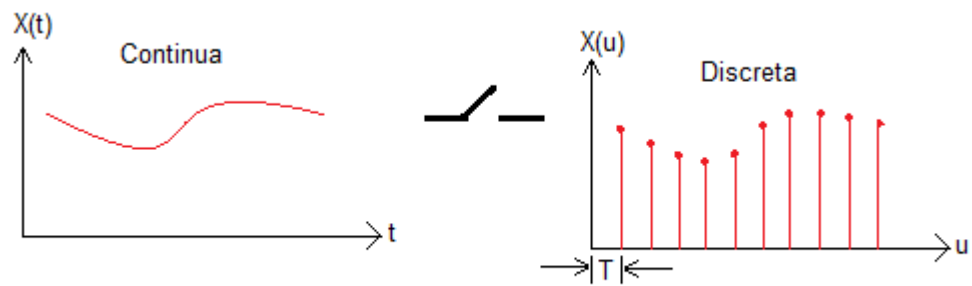
$$\omega_2 = 2$$

$$|G(j2)| = \frac{3.46}{2 \sqrt{(4 - 2^2)^2 + 2^2}} = 0.865 \rightarrow 20 \log(0.865)$$

$$|G(j2)| = -1.26 \text{ dB}$$

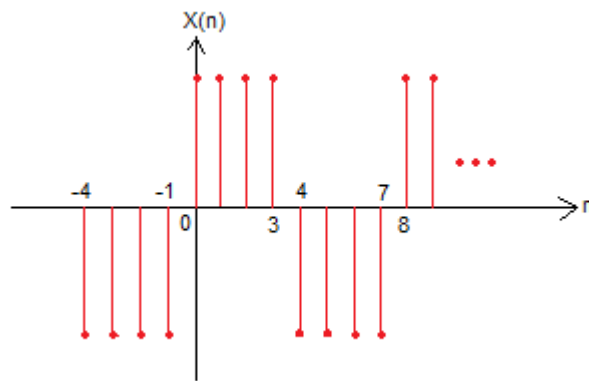
Señales y sistemas Discretos

Una señal discreta es una señal continua muestreada a una tasa uniforme.



T: Periodo de muestreo

Señal periódica



N=8

$$X(n) = X(n + N)$$

N: Periodo

Ω : Frecuencia fundamental

$$\Omega = \frac{2\pi}{N} \rightarrow \Omega = \frac{2\pi p}{q}; p \text{ y } q = Z \text{ (Enteros)}$$

Energía Total

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n)$$

Potencia Promedio

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^N x^2(n)$$

Señal periódica

$$P = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2(n)$$

Operaciones

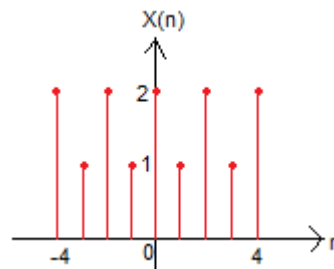
$$y(n) = cx(n), \text{Escalonamiento en magnitud}$$

$$y(n) = X_1(n) + X_2(n), \text{Suma}$$

$$y(n) = X_1(n) * X_2(n), \text{Multiplicación}$$

$$y(n) = X(Kn), \text{Escalamiento en tiempo}$$

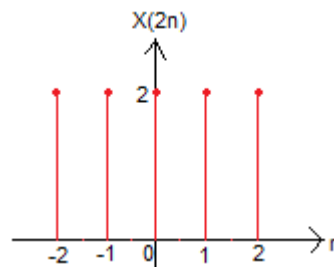
Ejemplo



Corrimiento

$$y(n) = x(n + a) \rightarrow \text{Izquierda}$$

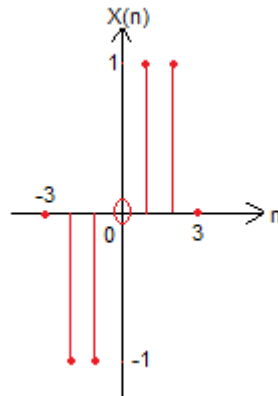
$$y(n) = X(n - a) \rightarrow \text{Derecha}$$



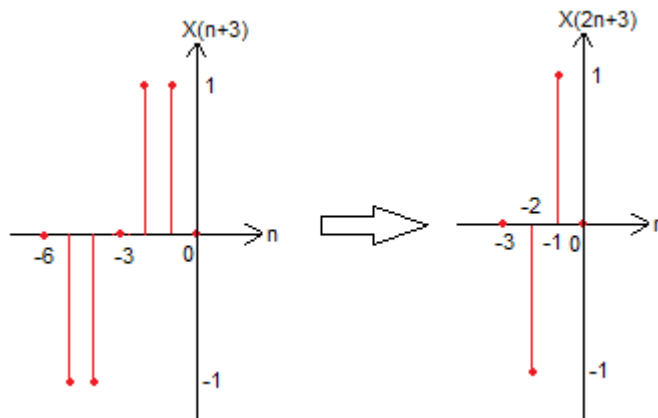
Conclusión: Los números solo pueden ser enteros por tanto se pierde $(-3,-1,1,3)$ ya que lo se hace es dividir en la mitad.

Ejemplo

Hallar $y(n) = X(2n + 3)$

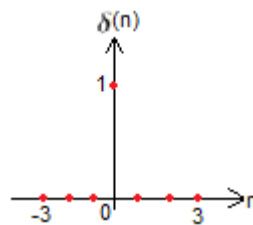


Nota: Primero se corre y luego se escala



Señales fundamentales

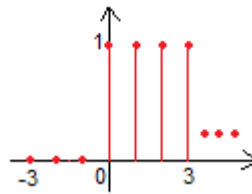
a) Impulso unitario: $\delta(n)$



$$\delta(0) = 1$$

$$\delta(n) = 0, \text{ si } n \neq 0; \quad \delta: \text{Delta Kronecter}$$

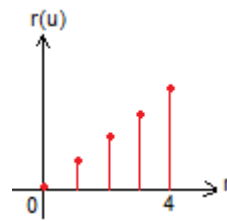
b) Escalón unitario: $u(n)$



$$u(n) = 1, n \geq 0$$

$$u(n) = 0, n < 0$$

c) Rampa unitaria



$$r(n) = n, n \geq 0$$

$$r(n) = 0, n < 0$$

d) Potencial: $X(n) = a^n$

e) Exponencial: $X(n) = e^{-an}$

f) Senoidal: $X(n) = A \text{sen}(\Omega n + \phi)$

Ejemplo

$$X_1(n) = \text{sen}(5\pi n)$$

$$X_2(n) = \sqrt{3} \cos(5\pi n)$$

$$\text{Hallar } y(n) = X_1(n) + X_2(n)$$

$$\text{Si } y(n) = A \text{sen}(\Omega n + \phi). \quad (1)$$

$$y(n) = \text{sen}(5\pi n) + \sqrt{3} \cos(5\pi n)$$

De 1

$$y(n) = A[\text{sen}(\Omega n)\cos\phi + \text{sen}\phi\cos(5\pi n)]$$

$$y(n) = A\cos\phi\text{sen}(\Omega n) + A\text{sen}\phi\cos(\Omega n)$$

$$\Omega = 5\pi$$

$$y(n) = A\cos\phi\text{sen}(5\pi n) + A\text{sen}\phi\cos(5\pi n)$$

Por comparación

$$A\cos\phi = 1 ; A\text{sen}\phi = \sqrt{3} ; \text{Dividiendo } \tan\phi = \sqrt{3} \rightarrow \phi = \pi/3$$

Elevando al cuadrado

$$A^2\cos^2\phi = 1$$

$$A^2\text{sen}^2\phi = 3$$

Entonces:

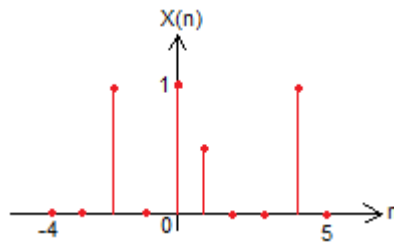
$$A^2 = 4 \rightarrow A = 2$$

$$y(n) = 2\text{sen}\left(5\pi n + \frac{\pi}{3}\right)$$

Representación de una señal discreta

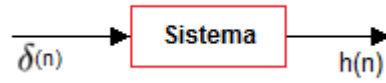
$$X(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k) \delta(n-k)$$

Ejemplo

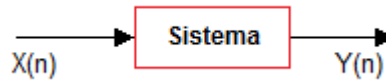


$$X(n) = X(-2) \delta(n+2) + X(0) \delta(n) + X(1) \delta(n-1) + X(4) \delta(n-4)$$

Sistema discreto LTI



$h(n)$: Respuesta al impulso unitario

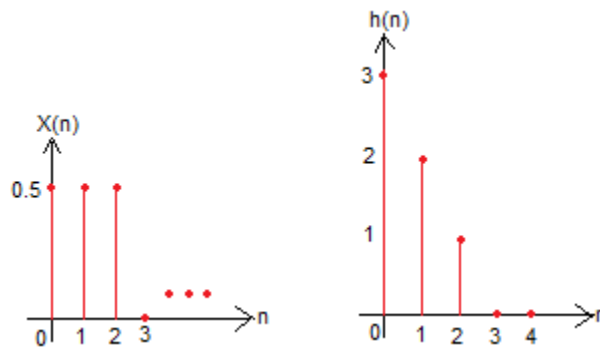


$y(n) = X(n) * h(n) \rightarrow$ Convolución

$$y(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n)h(n-k)$$

$$y(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n-k)h(n)$$

Ejemplo

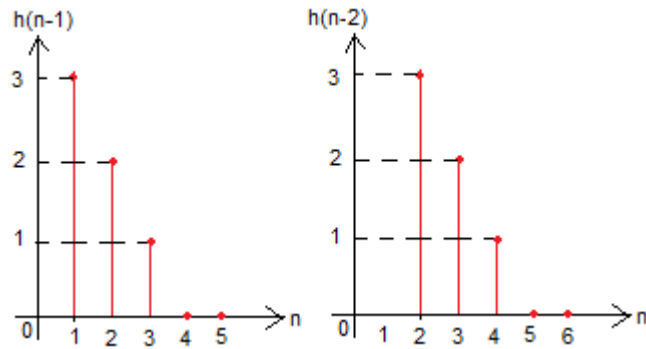


Hallar $y(n)$

Solución

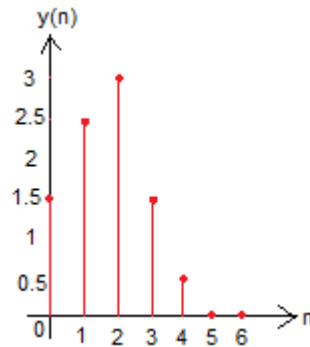
$$y(n) = X(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k)h(n-k) = \sum_{k=0}^2 X(k)h(n-k)$$

$$y(n) = X(0)h(n) + X(1)h(n-1) + X(2)h(n-2)$$



$$y(n) = 0.5[h(n) + h(n-1) + h(n-2)]$$

$$y(n) = 1.5 \delta(n) + 2.5 \delta(n-1) + 3 \delta(n-2) + 1.5 \delta(n-3) + 0.5 \delta(n-4)$$



Sistema Causal

La salida solo depende de las entradas pasadas y presentes

$$h(k) = 0 \text{ para } k < 0$$

Sistema Estable

La respuesta al impulso debe ser acotada

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$$

Ejemplo

1. Determinar si la señal es periódica

a). $x(n) = 4\cos(\pi n)$

$$\Omega = \pi \rightarrow \Omega = \frac{2\pi}{N} ; \Omega = \frac{2\pi p}{q} \rightarrow p = 1, q = 2$$

$$N = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

$$b). x(n) = 4\cos(3n)$$

$$\Omega = 3 = \frac{2\pi p}{q} \neq p \text{ y } q \text{ no son enteros}$$

No es periódica

2. Determinar las propiedades de los sistemas

$$a). y(n) + 2y(n-1) = x(n+1)$$

Ecuación de coeficientes constantes: es lineal, invariante en el tiempo y no causal.

$$b). y(n+1)4y(n) = 3x(n+1) - x(n-1)$$

Es un LTI causal.

3. Encontrar el valor $y(n)$ de:

$$a). y(n) + 0.5y(n-1) = 2x(n-1); x(n) = \delta(n); y(-1) = 0$$

$$y(n) = -0.5y(n-1) + 2x(n-1)$$

$$y(0) = -0.5y(-1) + 2x(-1) = 0$$

$$y(1) = -0.5y(0) + 2x(0) = 2$$

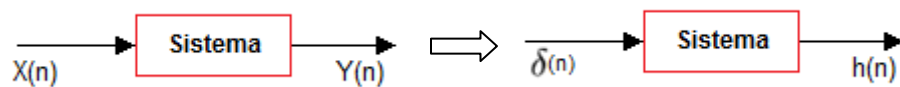
$$y(2) = -0.5y(1) + 2x(1) = -1$$

⋮

4. Encontrar la respuesta al impulso: $h(n)$

$$a). y(n) + 0.2y(n-1) = x(n) - x(n-1)$$

$$y(n) = -0.2y(n-1) + x(n) - x(n-1)$$



$$h(n) = -0.2y(n-1) + \delta(n) - \delta(n-1)$$

$$h(0) = -0.2h(-1) + \delta(0) - \delta(-1) = 1; \text{ el } h(n) \rightarrow \text{Siempre e considera despues de 0}$$

$$h(1) = -0.2h(0) + \delta(1) - \delta(0) = -1.2$$

$$h(2) = -0.2h(1) + \delta(2) - \delta(1) = 0.24$$

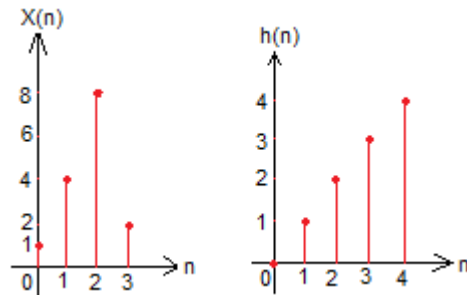
$$h(3) = -0.2h(2) = -0.048$$

⋮

$$h(n) = (-0.2)^{n-1}(-1.2) \text{ para } n \geq 1, h(n) = 1, n = 0$$

5. Realizar las convoluciones

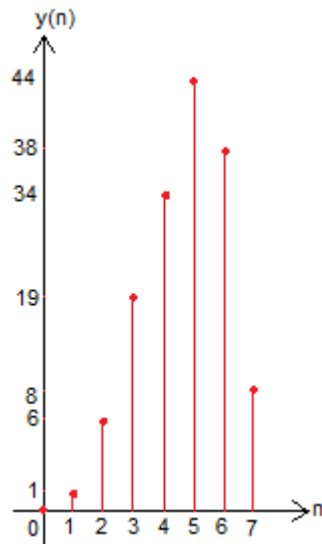
a).



$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=0}^3 x(k)h(n-k)$$

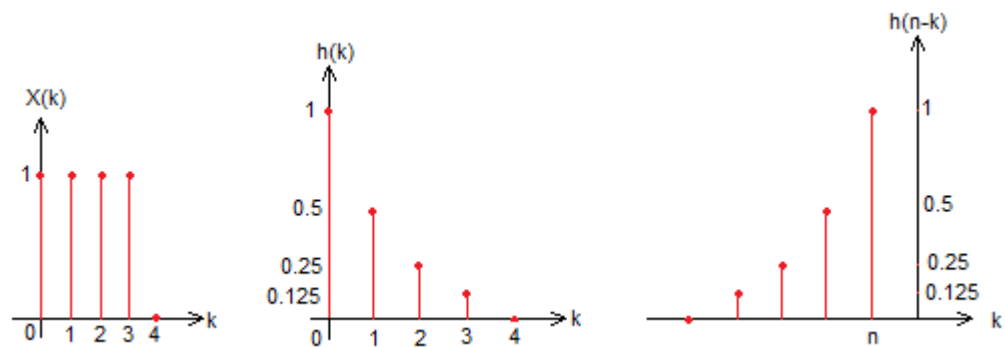
$$y(n) = x(0)h(n) + x(1)h(n-1) + x(2)h(n-2) + x(3)h(n-3)$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	X(n)
h(n)	0	1	2	3	4	-	-	-	1
h(n-1)	0	0	1	2	3	4	-	-	4
h(n-2)	0	0	0	1	2	3	4	-	8
h(n-3)	0	0	0	0	1	2	3	4	2
y(n)	0	1	6	19	34	44	38	8	-



$$b). x(n) = u(n) - u(n - 4)$$

$$h(n) = 0.5^n u(n)$$



Para $0 \leq n < 4$

$$y(n) = \sum_{k=0}^n 0.5^{n-k} = \sum_{k=0}^n 0.5^n * 2^k = 0.5^n \sum_{k=0}^n 2^k$$

$$\sum a^k = a^0 + a^1 + a^2 + \dots + a^n = s$$

$$a^1 + a^2 + a^3 + \dots + a^{n+1} = as$$

$$1 - a^{n+1} = s - as$$

$$s = \frac{-1 + a^{n+1}}{a - 1}$$

$$\sum_{k=0}^n 2^k = \frac{-1 + 2^{n+1}}{2 - 1} = -1 + 2^{n+1}$$

$$y(n) = 0.5^n[-1 + 2^{n+1}] = -0.5^n + 0.5^n * 2^{n+1}$$

$$y(n) = -0.5^n + 2$$

Para $n \geq 4$

$$y(n) = \sum_{k=0}^4 0.5^{n-k} = \sum_{k=0}^4 0.5^n * 2^k = 0.5^n \sum_{k=0}^4 2^k$$

$$y(n) = 31(0.5)^n$$

Transformada Z

$$Z[X(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)Z^{-n}$$

$$Z[X(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)Z^{-k}$$

$$Z[X(k)] = X(Z) = X(0) + X(1)Z^{-1} + X(2)Z^{-2} + \dots$$

Funciones elementales

a) Escalón unitario

$$Z[u(k)] = X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u(k)Z^{-k} = 1 + Z^{-1} + Z^{-2} + \dots$$

$$Z[u(k)] = \frac{1}{1 - Z^{-1}}$$

Matlab:

syms k z

symsum(z^-k,k,0,inf)

b) Rampa unitaria

$$X(k) = k$$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot z^{-k} = z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \dots$$

$$Z[k] = \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$$

c) Potencial

$$X(k) = a^k$$

$$Z[a^k] = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + a^3 z^{-3} + \dots$$

$$Z[a^k] = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

d) Exponencial

$$X(k) = e^{-ak}$$

$$Z[e^{-ak}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-ak} z^{-k} = 1 + e^{-a} z^{-1} + e^{-2a} z^{-2} + e^{-3a} z^{-3} + \dots$$

$$Z[e^{-ak}] = \frac{1}{1 - e^{-a} z^{-1}}$$

e) Senoidales

$$X(k) = \text{sen}(\Omega k)$$

$$Z[\text{sen}(\Omega k)] = \frac{e^{j\Omega k} - e^{-j\Omega k}}{2j}$$

$$Z[\text{sen}(\Omega k)] = \frac{z^{-1} \text{sen}(\Omega)}{1 - 2z^{-1} \cos(\Omega) + z^{-2}}$$

$$Z[\cos(\Omega k)] = \frac{1 - z^{-1} \cos(\Omega)}{1 - 2z^{-1} \cos(\Omega) + z^{-2}}$$

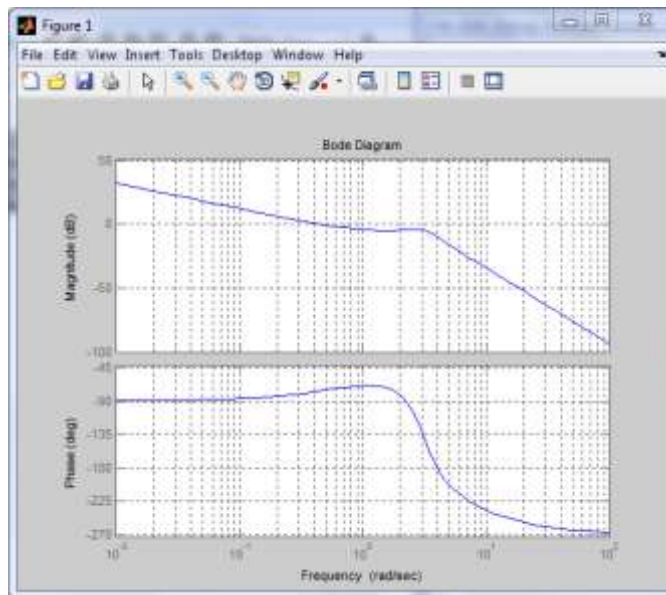
La aplicación de los visto lo podemos ver en MATLAB de la siguiente forma:

1. Realizar el diagrama de bode de:
a).

$$G(s) = \frac{20(s + 1)}{s(s + 5)(s^2 + 2s + 10)}; \text{lazo abierto}$$

```
% 1. :_ Realizar el diagrama de Bode
```

```
num=[20 20]; %Coeficientes del numerador de la función de transferencia
den=[1 7 20 50 0]; %Coeficientes del denominador de la función de
transferencia
gs=tf(num,den) %Comando para generar la función de transferencia del
sistema
bode(gs) %Comando para generar el diagrama de bode del sistema
grid %grilla de la grafica
```



O de otra forma:

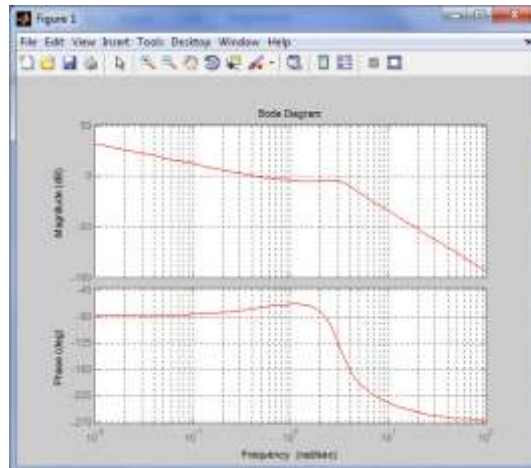
```
%o de otra forma
```

```
n1=[20 20]; %Coeficientes del numerador de la primera parte de la función
de transferencia
```

```

d1=[1 5 0]; %Coeficientes del denominador de la primera parte de la
función de transferencia
gs1=tf(n1,d1) %Comando para generar la primera parte de la función de
transferencia del sistema
n2=1; %Coeficientes del numerador de la primera parte de la función de
transferencia
d2=[1 2 10]; %Coeficientes del denominador de la primera parte de la
función de transferencia
gs2=tf(n2,d2) %Comando para generar la primera parte de la función de
transferencia del sistema
gs=gs1*gs2 %Multiplicación de las dos funciones de transferencia ya que
se encontrarían en serie
bode(gs,'r') %Comando para generar el diagrama de bode del sistema
grid %grilla de la grafica

```



Si reemplazamos bode por margin

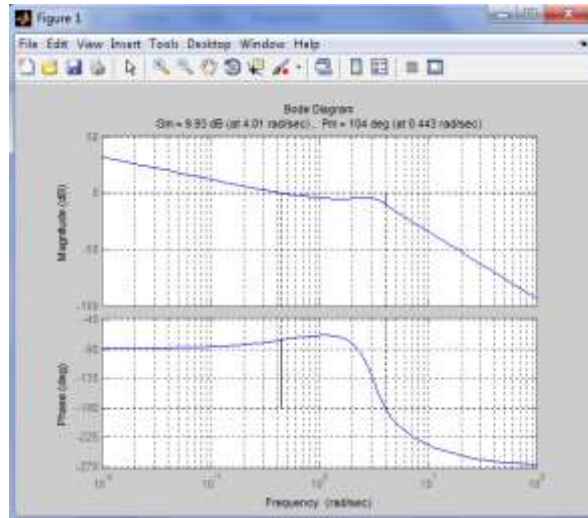
```
%Reemplazando bode por margin
```

```

n1=[20 20]; %Coeficientes del numerador de la primera parte de la función
de transferencia
d1=[1 5 0]; %Coeficientes del denominador de la primera parte de la
función de transferencia
gs1=tf(n1,d1) %Comando para generar la primera parte de la función de
transferencia del sistema
n2=1; %Coeficientes del numerador de la primera parte de la función de
transferencia
d2=[1 2 10]; %Coeficientes del denominador de la primera parte de la
función de transferencia
gs2=tf(n2,d2) %Comando para generar la primera parte de la función de
transferencia del sistema

```

```
gs=gs1*gs2 %Multiplicación de las dos funciones de transferencia ya que
se encontrarían en serie
margin(gs,'g') %Comando para generar el diagrama de bode del sistema
grid %grilla de la grafica
```



Vemos que este nos arroja el valor de la ganancia en decibels y el angulo en grados del sistema.

Si queremos o necesitamos guardar los datos, hacemos:

```
%Si necesitamos guardar los datos para alguna aplicación
n1=[20 20]; %Coeficientes del numerador de la primera parte de la función
de transferencia
d1=[1 5 0]; %Coeficientes del denominador de la primera parte de la
función de transferencia
gs1=tf(n1,d1) %Comando para generar la primera parte de la función de
transferencia del sistema
n2=1; %Coeficientes del numerador de la primera parte de la función de
transferencia
d2=[1 2 10]; %Coeficientes del denominador de la primera parte de la
función de transferencia
gs2=tf(n2,d2) %Comando para generar la primera parte de la función de
transferencia del sistema
gs=gs1*gs2 %Multiplicación de las dos funciones de transferencia ya que
se encontrarían en serie
[mg,mp,wcg,wcp]=margin(gs) %Comando para guardar los datos en variables
```

Matlab nos arroja:

Transfer function:

$$20s + 20$$

$$s^2 + 5s$$

Transfer function:

$$1$$

$$s^2 + 2s + 10$$

Transfer function:

$$20s + 20$$

$$s^4 + 7s^3 + 20s^2 + 50s$$

$$mg = 3.1369$$

$$mp = 103.6573$$

$$w_{cg} = 4.0132$$

$$w_{cp} = 0.4426$$

GRAFICA DE SEÑALES DISCRETAS

2. Graficar

a).

$$X(n) = \begin{cases} 0, & \text{si } n < 2 \\ 2n - 4, & \text{si } 2 \leq n < 4 \\ 4 - n, & \text{si } n \geq 4 \end{cases}$$

% 2.:_ Graficas de señales discretas

%a) ._

n1=-6:1; %Vector primera condición

x1=zeros(1,length(n1)); %Coloca en cero todos los puntos de n1 o sea desde -6 hasta 1

n2=2:3; %Vector segunda condición

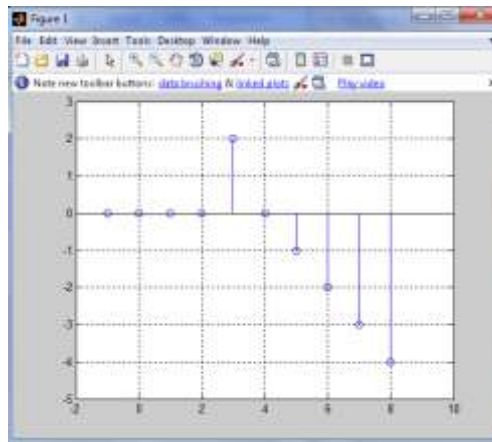
x2=2*n2-4; %Realiza las operaciones descritas en la función de ese tramo

n3=4:8; %Vector tercera condición

```

x3=4-n3; %Realiza las operaciones descritas en la función de ese tramo
n=[n1 n2 n3]; %Vector de valores que puede tomar n
x=[x1 x2 x3]; %vector de la evaluación de las función en cada punto de n
dato
stem(n,x) %Grafica de forma discreta la función
axis([-2 10 -5 3]) %limites de los ejes de la grafica
grid %grilla de la grafica

```



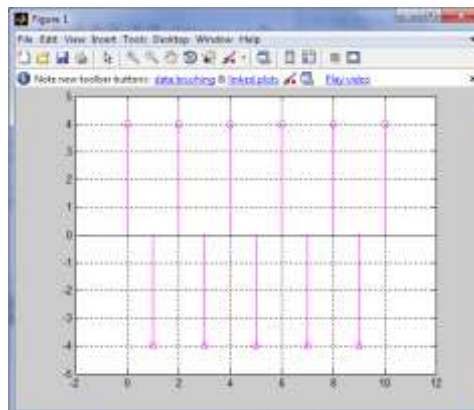
b). $X(n) = 4\cos(\pi n)$

```

%b) . _
n=0:10; %vector de posición en el eje x
x=4*cos(pi*n); %función dada
stem(n,x,'m') %Grafica de forma discreta la función
axis([-2 12 -5 5]) %limites de los ejes de la grafica
grid %grilla de la grafica

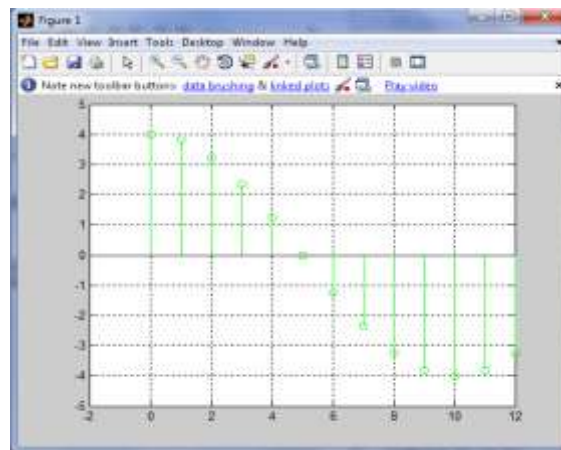
```

La grafica obtenida es:

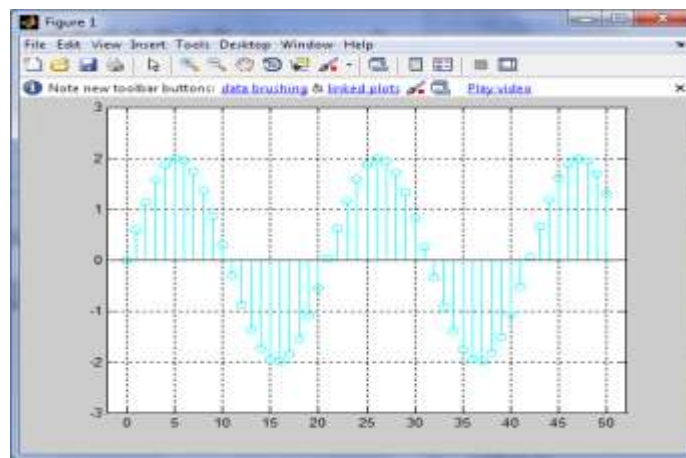


```
%Para incrementar el número de ciclos mostrados en la grafica y la
magnitud
%del ángulo
n=0:50; %vector de posición en el eje x
x=4*cos(0.1*pi*n); %función dada
stem(n,x,'g') %Grafica de forma discreta la función
axis([-2 12 -5 5]) %limites de los ejes de la grafica
grid %grilla de la grafica
```

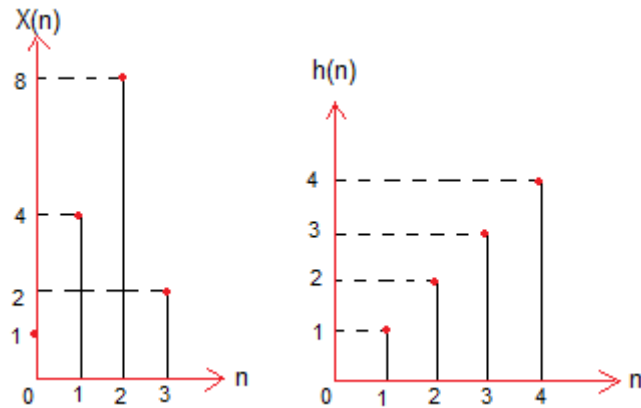
La grafica obtenida es:



```
c). %0 si queremos ver por completo la forma de una función seno tenemos
n=0:50; %vector de posición en el eje x
x=2*sin(0.3*n); %función dada
stem(n,x,'c') %Grafica de forma discreta la función
axis([-2 52 -3 3]) %limites de los ejes de la grafica
grid %grilla de la grafica
```



3. Hallar la Convolución:

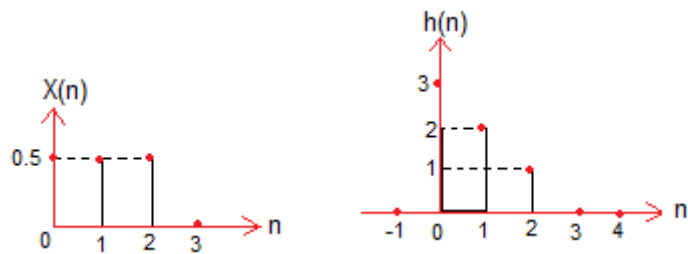


```
% 3.:_ Hallar la Convolución
xn=[1 4 8 2]; %Vector de la función Xn
hn=[0 1 2 3 4]; %Vector de la función hn
yn=conv(xn,hn) %Comando para hallar la Convolución de las 2 funciones
```

MATLAB nos arroja:

$y_n = 0 \quad 1 \quad 6 \quad 19 \quad 34 \quad 44 \quad 38 \quad 8$

4. Encontrar los valores de $Y(n)$

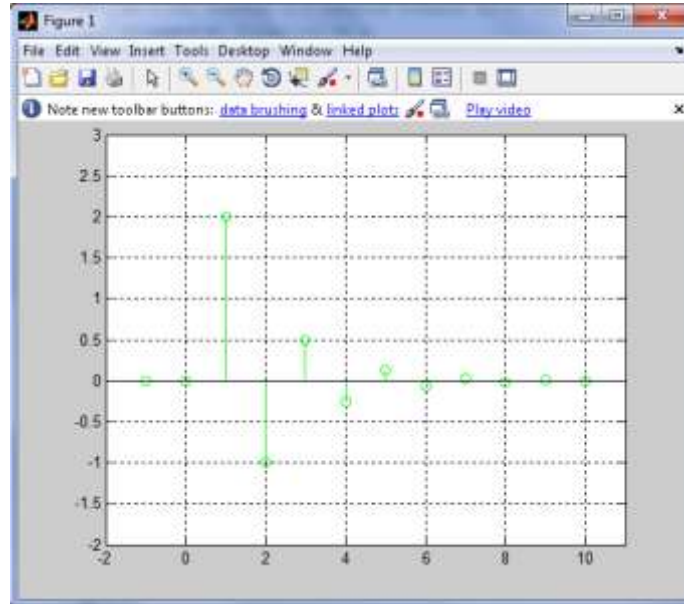


```
% 4.:_ Encontrar los valores de y(n)
n=-1:10; %vector n o valores tomados en el eje x
l=length(n) %Longitud de n
xn=zeros(1,l); %Coloca en cero todas las posiciones del vector n
xn(2)=1; %Coloca en uno la posición 2 del vector
yn(1)=0; %Coloca el valor en cada posición
for i=2:l %Ciclo para encontrar los valor de Y(n)
    yn(i)=-0.5*yn(i-1)+2*xn(i-1);
end
```

```

stem(n,yn,'g') %Grafica discretamente la función
axis([-2 11 -2 3]) %limites de los ejes de la grafica
grid %grilla de la grafica

```



Propiedades y Teoremas

a) Multiplicación por una constante

$$Z[aX(k)] = aZ[X(k)]$$

b) Linealidad

Si $X(k) = af(k) + bg(k)$

$$Z[X(k)] = X(z) = aF(z) + bG(z)$$

c) Multiplicación por a^k

Si $y(k) = a^k X(k)$

$$Z[y(k)] = Z[a^k X(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} a^k X(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} X(k) (a^{-1}z)^{-k} = X(a^{-1}z)$$

$$Z[X(k)] = X(z)$$

d) Teorema de translación (e^{-ak})

$$y(k) = e^{-ak}X(k)$$

$$Z[y(k)] = Z[e^{-ak}X(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-ak}X(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} X(k)(e^a z)^{-k} = X(e^a z)$$

e) Teorema de corrimiento

$$Z[X(k-n)] = Z^{-n}X(z)$$

$$Z[X(k-n)] = z^n \left[X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} X(k)z^{-k} \right] = z^n X(z) - z^n X(0) - z^{n-1} X(1) - \dots - z X(n-1)$$

f) Teorema del valor inicial

$$X(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

g) Teorema del valor final

$$X(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})X(z)$$

$$X(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)X(z)$$

Ejemplo

a). $X(k) = 4u(k-3)$

$$u(k) = \text{Escalon unitario}$$

$$Z[u(k)] = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$Z[X(k)] = \frac{4z^{-3}}{1 - z^{-1}} = \frac{4}{z^3 - z^2}$$

b). $y(k) = 5^{k-2}; X(k) = 5^k \rightarrow y(k) = X(k-2)$

$$Z[5^k] = \frac{1}{1 - az^{-1}} \rightarrow Z[5^k] = \frac{1}{1 - 5z^{-1}}$$

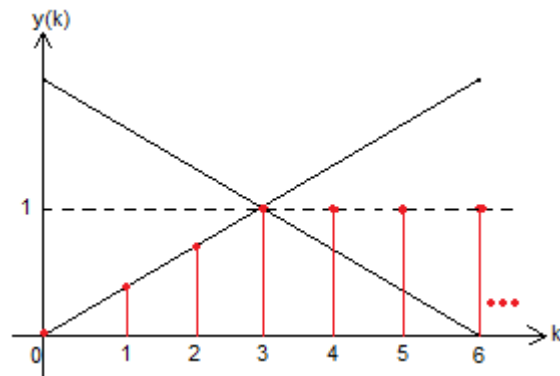
$$Z[y(k)] = \frac{z^{-2}}{1 - 5z^{-1}}$$

c). Determinar el valor inicial de:

$$X(z) = \frac{(1 - e^{-5})z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - e^{-5}z^{-1})}; \quad X(k)_{k=0} = X(0)$$

$$X(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = 0$$

d). Hallar $X(z)$ de:



$$y(k) = \frac{1}{3}k - \frac{1}{3}(k-3)$$

$$Z[y(k)] = \frac{z^{-1}}{3(1 - z^{-1})^2} - \frac{z^{-4}}{3(1 - z^{-1})^2}$$

Transformada Inversa Z

$$X(z) \xrightarrow{z^{-1}} X(k)$$

a) Método de división directa

$$Z[X(k)] = X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} X(k)z^{-k}$$

$$Z[X(k)] = X(0) + X(1)z^{-1} + X(2)z^{-2}$$

Ejemplo

$$X(z) = \frac{5z + 10}{z^2 - z + 0.16}$$

Solución

$$X(z) = \frac{5z^{-1} + 10z^{-2}}{1 - z^{-1} + 0.16z^{-2}}; \text{Dividiendo}$$

$$X(z) = 5z^{-1} + 15z^{-2} + 14.2z^{-3} + \dots$$

$$X(0) = 0; X(1) = 5; X(2) = 15; X(3) = 14.2 \dots$$

$$X(k) = [0 \ 5 \ 15 \ 14.2 \dots]$$

b) Fracciones parciales

Ejemplo

$$X(z) = \frac{z + 0.8}{(z - 0.5)(z + 0.2)} = \frac{c_1}{z - 0.5} + \frac{c_2}{z + 0.2}$$

$$X(z) = \frac{1.85}{z - 0.5} - \frac{0.85}{z + 0.2}$$

$$X(z) = \frac{1.85z^{-1}}{1 - 0.5z^{-1}} - \frac{0.85z^{-1}}{1 + 0.2z^{-1}}$$

$$X(k) = 1.85(0.5)^{k-1} - 0.85(-0.2)^{k-1}$$

Ejemplo

$$X(z) = \frac{(z - 1)(z + 0.8)}{(z - 0.5)(z + 0.2)}$$

Nota: Cuando *numerador* $\geq$ *denominador*, lo mejor es dividir por z la ecuación.

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{(z - 1)(z + 0.8)}{z(z - 0.5)(z + 0.2)} = \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z - 0.5} + \frac{c_3}{z + 0.2}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{8}{z} - \frac{1.85}{z - 0.5} - \frac{5.14}{z + 0.2} \rightarrow X(z) = 8 - \frac{1.85 \cdot z}{z - 0.5} - \frac{5.14 \cdot z}{z + 0.2}$$

$$X(z) = 8 - \frac{1.85}{1 - 0.5z^{-1}} - \frac{5.14}{1 + 0.2z^{-1}}$$

$$X(k) = 8 \delta(k) - 1.85(0.5)^k - 5.14(-0.2)^k$$

Ecuaciones en Diferencia

Ejemplo

$$\underbrace{X(k+2)}_1 + \underbrace{5X(k+1)}_2 + \underbrace{6X(k)}_3 = 0; \quad X(0) = 0; \quad X(1) = 1$$

Sacar transformada Z

$$\underbrace{z^2 X(z) - z^2 X(0) - zX(1)}_1 + \underbrace{5[zX(z) - zX(0)]}_2 + \underbrace{6X(z)}_3 = 0$$

$$z^2 X(z) - z + 5zX(z) + 6X(z) = 0$$

$$x(z)[z^2 + 5z + 6] = z \rightarrow X(z) = \frac{z}{z^2 + 5z + 6}$$

$$X(z) = \frac{z}{(z+2)(z+3)} = \frac{z}{z+2} - \frac{z}{z+3} = \frac{1}{1+2z^{-1}} - \frac{1}{1+3z^{-1}}$$

$$X(k) = (-2)^k - (-3)^k$$

Ejemplo

Resolver la ecuación en diferencias:

$$X(k+2) + 0.5X(k+1) + 0.2X(k) = u(k+1) + 0.3u(k)$$

Condiciones

$$X(k) = 0, k \leq 0; \quad u(k) = 0, k < 0$$

$$u(0) = 1.5, u(1) = 0.5, u(2) = -0.5, u(k) = 0, k = 3, 4, 5, \dots$$

Sacando transformada Z

$$z^2 X(z) - z^2 X(0) - zX(1) + 0.5[zX(z) - zX(0)] + 0.2 X(z) = zu(z) - zu(0) + 0.3u(z)$$

$$\text{Para } k = -1: X(1) + 0.5X(0) + 0.2X(-1) = u(0) + 0.3u(-1)$$

$$X(1) = u(0) = 1.5$$

$$z^2 X(z) - 1.5z + 0.5zX(z) + 0.2X(z) = Zu(z) - 1.5z + 0.3u(z)$$

$$X(z)[z^2 + 0.5z + 0.2] = u(z)[z + 0.3]$$

$$X(z) = \frac{z + 0.3}{z^2 + 0.5z + 0.2} u(z)$$

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u(k)z^{-k} = u(0) + u(1)z^{-1} + u(2)z^{-2} + u(3)z^{-3} + \dots$$

$$u(z) = 1.5 + 0.5z^{-1} - 0.5z^{-2}$$

$$X(z) = \frac{(z + 0.3)(1.5 + 0.5z^{-1} - 0.5z^{-2})}{z^2 + 0.5z + 0.2}$$

$$X(z) = \frac{(z + 0.3)(1.5z^2 + 0.5z - 0.5)}{z^2(z^2 + 0.5z + 0.2)}$$

Matlab

num=[1.5 0.95 0.65 0.15]

den=[1 0.5 0.2 0 0]

[*r*,*p*,*k*]=residue(*num*,*den*)

r = 0.0625 + 0.6995i

0.0625 - 0.6995i

1.3750

0.7500

p = -0.2500 + 0.3708i

-0.2500 - 0.3708i

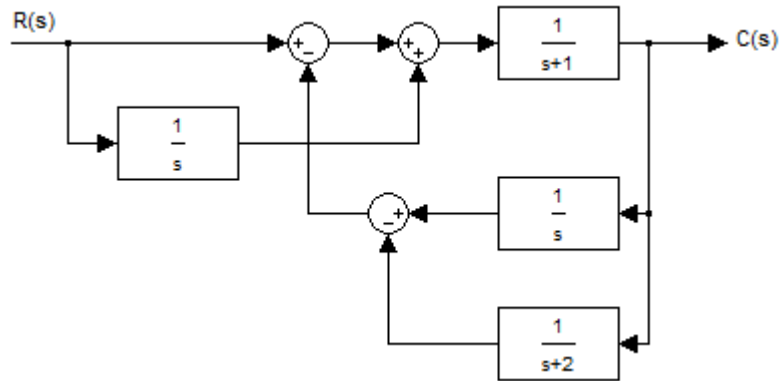
0

0

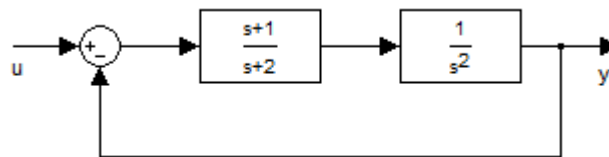
k = []

Problemas Propuestos

1. Encontrar la función de transferencia del sistema en lazo cerrado:



2. Obtenga una representación en el espacio de estados de:



3. Un sistema está descrito mediante la ecuación diferencial, $y''' + 3y'' + 2y' = u$ obtener la representación en el espacio de estados.
4. Un sistema está discreto mediante los espacios de estado:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Obtenga la función de transferencia del sistema; tener en cuenta que

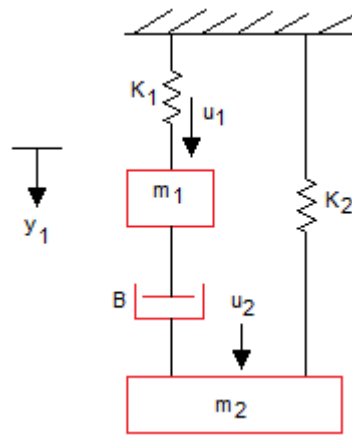
$$G(s) = C(SI - A)^{-1}B + D$$

5. Obtenga la representación en el espacio de estados del sistema mecánico. u_1 y u_2 son las entradas y y_1 y y_2 las salidas:

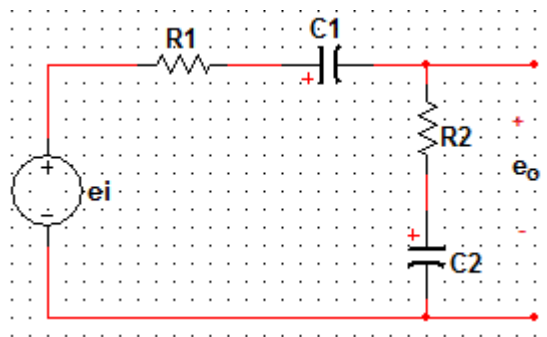
Sugerencia:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 \\ x_2 &= y_1' \end{aligned}$$

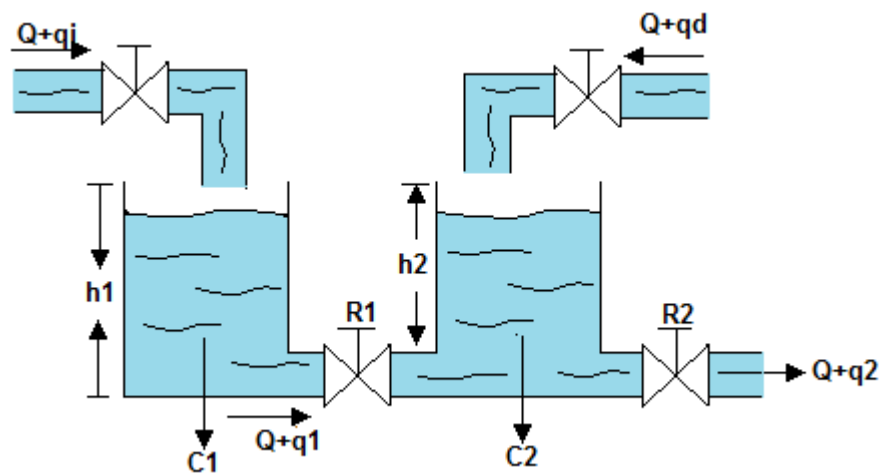
$$\begin{aligned} x_3 &= y_2 \\ x_4 &= y_2' \end{aligned}$$



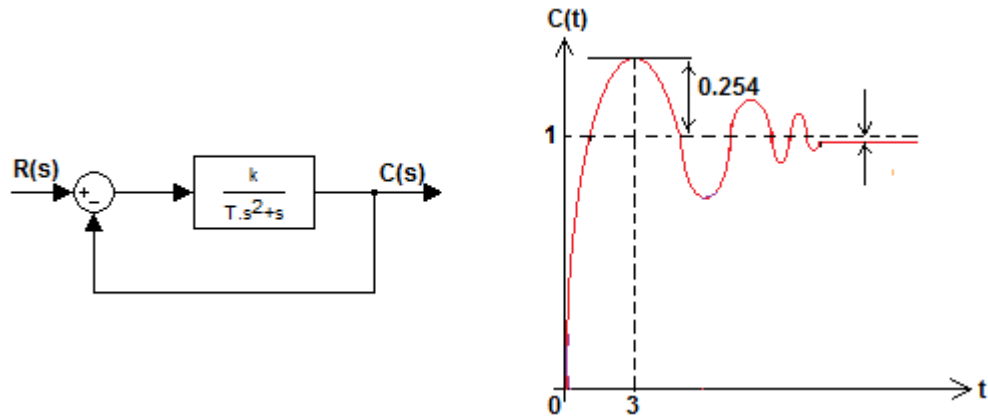
6. Obtenga la función de transferencia del sistema eléctrico:



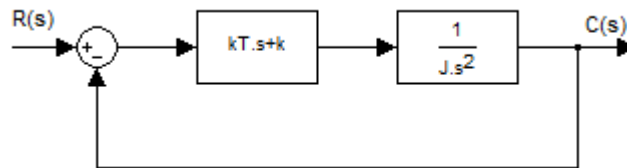
7. Para el sistema de nivel de líquido, realice el diagrama en bloque y encuentre la función de transferencia.



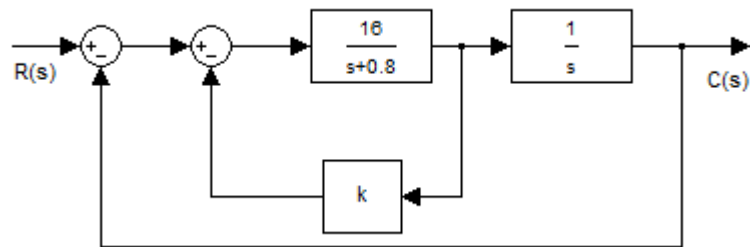
8. La respuesta al escalón unitario del sistema se da en la figura. Hallar los valores de K y T



9. El diagrama es un sistema de control de posición, si la constante de tiempo del controlador es $T = 3 \text{ sg}$ y la razón entre el par y la inercia es $\frac{K}{J} = \frac{2 \text{ rad}^2}{9 \text{ sg}^2}$. Encuentre el valor del factor de amortiguamiento.



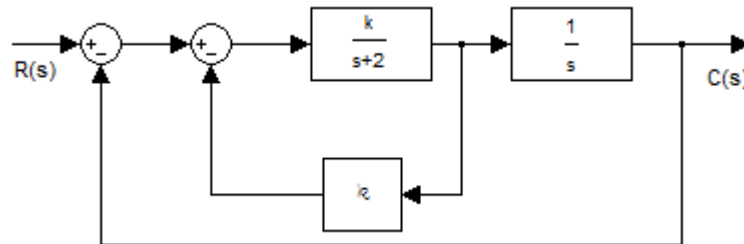
10. Para el sistema determine el valor de k de modo que el factor de amortiguamiento $\xi = 0.5$, obtenga tr , tp , Mp y ts



11. Obtenga la repuesta al impulso unitario y el escalón unitario de un sistema realimentado unitariamente cuya función de transferencia en lazo abierto es:

$$G(s) = \frac{2s + 1}{s^2}$$

12. Determine los valores k y k_c tal que el sistema tenga un factor de amortiguamiento $\xi = 0.7$ y una frecuencia natural no amortiguada $\omega_n = 4 \frac{rad}{seg}$.



13. Hallar el error en estado estacionario de la función de transferencia en lazo cerrado dada, con una entrada rampa unitaria.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Js^2 + Bs + K}$$

14. Considere el sistema con realimentación unitaria, que posee la función de transferencia en lazo abierto.

$$G(s) = \frac{10}{s + 1}$$

Obtener la salida en estado estable, si la entrada es:

- $r(t) = \text{sen}(t + 30^\circ)$
- $r(t) = 2\cos(2t - 45^\circ)$

15. Para el siguiente sistema.

$$G(s) = \frac{10}{s^2 + 10s + 100}$$

- Encontrar ξ , ω_n , graficar los polos.
- Hallar la respuesta del estado estacionario a la entrada $x(t) = \cos(10t)u(t)$

16. Obtener la repuesta de un sistema cuya función de transferencia en lazo abierto es

$$G(s) = \frac{2s + 1}{s^2}$$

- Si la entrada es el impulso unitario

b). Si la entrada es el paso unitario

17. Considere un sistema de control con realimentación unitaria cuya función de transferencia en lazo cerrado es:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{Ks + b}{s^2 + as + b}$$

Determinar:

a). La función de transferencia en lazo abierto

b). El error de estado estacionario al paso unitario

18. Un sistema de control de realimentación unitaria tiene una función de transferencia en lazo abierto:

$$G(s) = \frac{as + 1}{s^2}$$

Determinar el valor de (a) para que el margen de fase sea de 45°

19. Un sistema de control de realimentación unitaria tiene una función de transferencia en lazo abierto.

$$G(s) = \frac{K}{s(s^2 + s + 4)}$$

a). Determinar el valor de la función de transferencia de corte ω_1 para que el margen de fase sea de 50°

b). El valor de K

c). El margen de ganancia

Transformada Z

1. Determinar la transformada Z de las siguientes funciones por fracciones parciales.

a)

$$F(s) = \frac{s}{s(s^2 + 4)}$$

b)

$$F(s) = \frac{10}{s(s^2 + s + 2)}$$

2. Determinar la transformada Z de:

a)

$$f(k\tau) = k\tau e^{-2k\tau}$$

b)

$$f(k) = (0.1)^k + a5k(0.1)^{k-1}$$

3. Encuentre la transformada Z inversa de:

a)

$$F(z) = \frac{10z}{z^2 - 1}$$

b)

$$F(z) = \frac{1}{z(z - 0.2)}$$

c)

$$F(z) = \frac{z(z + 1)}{(z - 1)(z^2 - z + 1)}$$

4. Resolver la ecuación en diferencias

a)

$$x(k) + 5x(k - 1) + 6x(k - 2) = u(k) \text{ Escalon unitario}$$

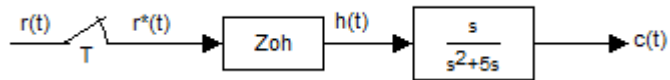
b)

$$x(k + 2) - 0.1x(k + 1) - 0.2x(k) = u(k + 1) + u(k)$$

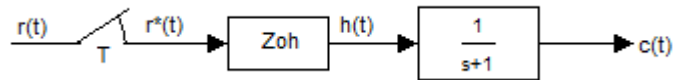
$$u(k): \text{Escalon unitario}; \quad x(0) = 0, x(1) = 0$$

Control Discreto

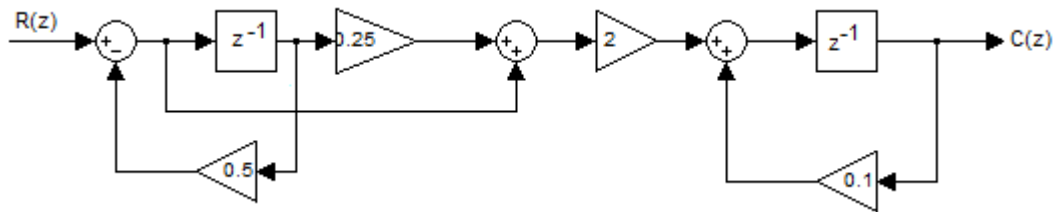
1. Hallar la salida $c(k\tau)$, la entrada es un pulso unitario y el periodo de muestreo es 0.1 seg, determine el valor final de $c(k\tau)$.



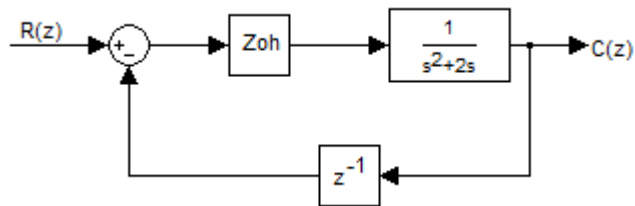
2. Encontrar $c(k\tau)$, cuando la entrada es el escalón unitario. Hallar el valor final de $c(k\tau)$, $\tau = 0.1$.



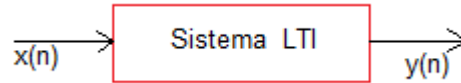
3. Encontrar la función de transferencia del sistema $C(z)/R(z)$.



4. Para el sistema de la figura, encontrar los polos y ceros, dibujarlos en el plano Z y probar su estabilidad; $\tau = 0.5 \text{ seg}$.



REPRESENTACION DE FOURIER PARA SEÑALES



$x(n)$: Entrada senodal

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\Omega k}, \text{ Respuesta en frecuencia}$$

$$y(n) = H(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}$$

$$y(t) = H(j\omega)e^{j\omega t}$$

Tiempo	Periódica	No periódica
Continuo	Serie de Fourier	Transformada de Fourier
Discreto	Serie de Fourier discreta	Transf. De Fourier discreta

a. Señales periódicas en el tiempo discreto (DTFS)

$$x(n) = \sum_{k=(N)} X(k)e^{jk\Omega_0 n} \quad y \quad X(k) = \frac{1}{N} \sum_{k=(N)} x(n)e^{-jk\Omega_0 n}$$

$X(k)$ son los coeficientes de la serie de Fourier

Ejemplo

$$x(n) = \cos\left(\frac{\pi}{8}n + \phi\right); x(n) = A\cos(\Omega_0 n + \phi)$$

Solución

$$\Omega_0 = \frac{\pi}{8} = \frac{2\pi}{N}$$

Entonces tenemos:

Periodo fundamental $N = 16$

$$x(n) = \frac{e^{j(\frac{\pi}{8}n + \phi)} + e^{-j(\frac{\pi}{8}n + \phi)}}{2} = \frac{1}{2}e^{-j\phi}e^{-j\frac{\pi}{8}n} + \frac{1}{2}e^{j\phi}e^{j\frac{\pi}{8}n}$$

$$\text{Si } x(n) = \sum_{k=(N)} X(k) e^{j\left(\frac{k\pi}{8}\right)n}; \text{ Por comparación}$$

Coeficientes:

$$X(-1) = \frac{1}{2} e^{-j\phi}; \quad X(1) = \frac{1}{2} e^{j\phi}$$

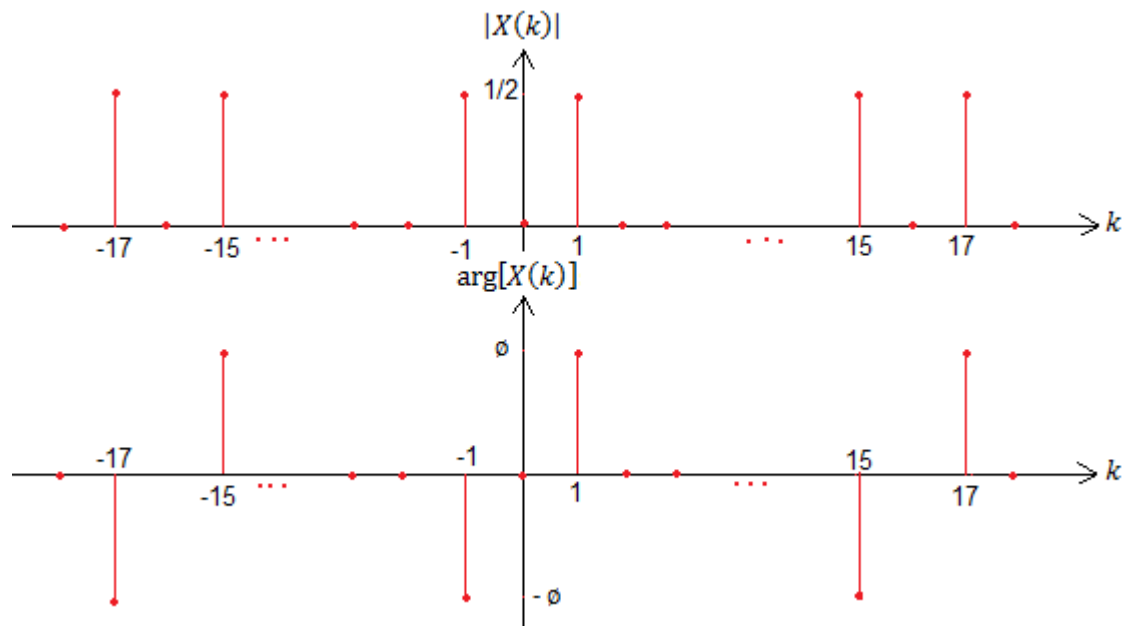
$$\text{Como } N = 16 \rightarrow X(15) = X(31) = \dots = \frac{1}{2} e^{-j\phi}$$

$$X(17) = X(33) = \dots = \frac{1}{2} e^{j\phi}$$

Para otro valor de k , $X(k) = 0$

$|X(k)|$: Espectro de magnitud

$\arg[X(k)]$: Espectro de fase



b. Señales periódicas en el tiempo continuo: Series de Fourier (SF)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k) e^{jk\omega_0 t} \rightarrow X(k) = \frac{1}{T} \int x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$T = \text{Periodo fundamental}; \omega_0 = 2\pi/T$

Ejemplo

$$x(t) = 3\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right); x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

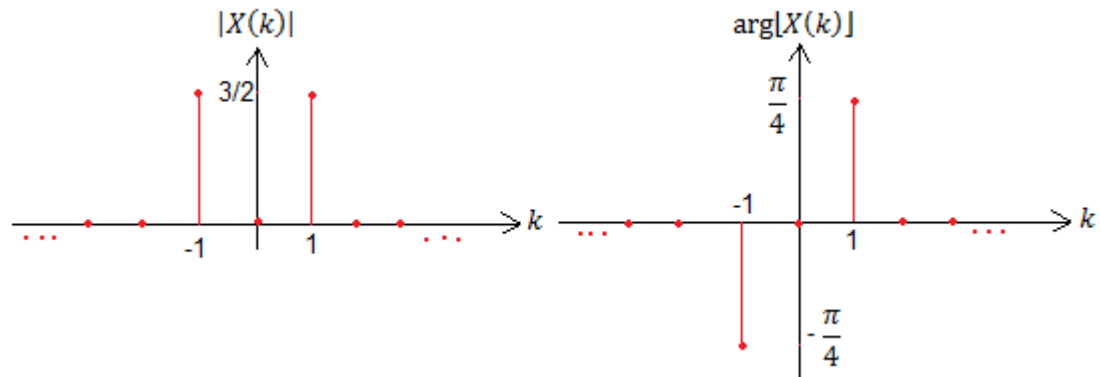
$$\omega_0 = \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{T}; T = 4$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k) e^{jk\frac{\pi}{2}t}; X(k) \text{ son los coeficientes de Fourier}$$

$$x(t) = 3 \frac{e^{j(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4})} + e^{-j(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4})}}{2} = \frac{3}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}} e^{-j\frac{\pi}{2}t} + \frac{3}{2} e^{j\frac{\pi}{4}} e^{j\frac{\pi}{2}t}$$

Coefficientes:

$$X(-1) = \frac{3}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}}; X(1) = \frac{3}{2} e^{j\frac{\pi}{4}}$$



c. Señales no periódicas en tiempo discreto (DTFT)

Señal no periódica:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega$$

Transformada de Fourier:

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n}$$

Ejemplo

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n); \text{ Funcion exponencial.}$$

Solución

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-j\Omega n}$$

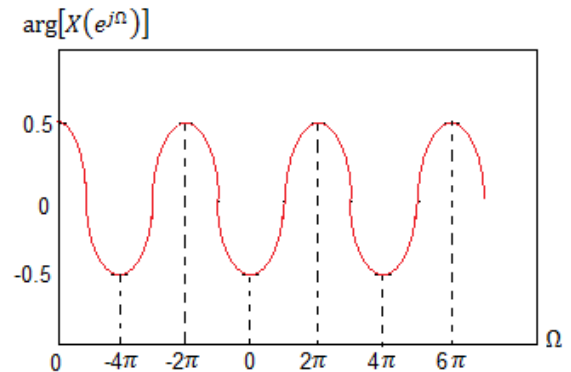
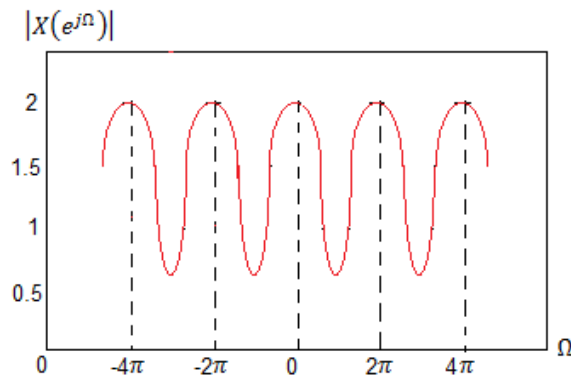
$$X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1 - 1/2 e^{-j\Omega}} = \frac{1}{1 - 1/2 [\cos(\Omega) - j \sin(\Omega)]} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \cos(\Omega) + \frac{j}{2} \sin(\Omega)}$$

Espectro de magnitud:

$$|X(e^{j\Omega})| = \frac{1}{\left[\left(1 - \frac{1}{2} \cos(\Omega)\right)^2 + \left(\frac{j}{2} \sin(\Omega)\right)^2 \right]^{1/2}} = \frac{1}{\left(\frac{5}{4} - \cos(\Omega)\right)^{1/2}}$$

Espectro de fase:

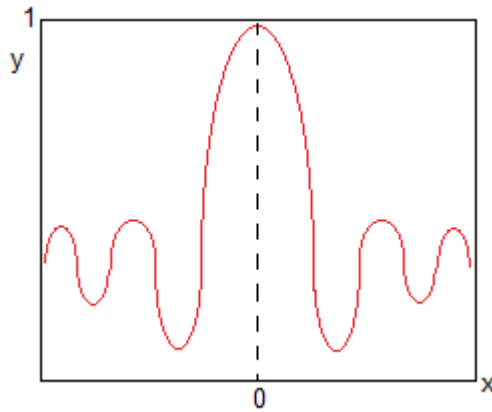
$$\arg[X(e^{j\Omega})] = -\tan^{-1} \frac{\frac{1}{2} \sin(\Omega)}{1 - \frac{1}{2} \cos(\Omega)}$$



Función Senc(x)

$$y = \text{senc}(x) = \frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi x}$$

$$x = 0; y = 1$$



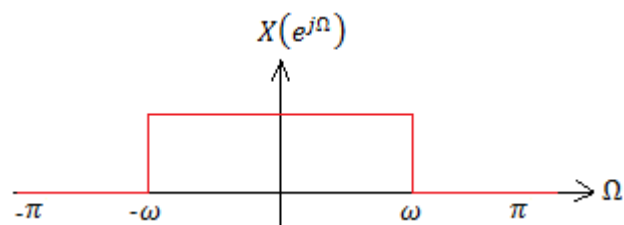
$$\text{senc}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega t} d\omega; \text{ Tranf. Fourier inversa continua}$$

$$\sum_{n=-M}^M e^{-j\Omega n} = \frac{\text{sen}\left[\frac{\Omega}{2}(2M+1)\right]}{\text{sen}\left(\frac{\Omega}{2}\right)}$$

Ejemplo

Encuentre la transformada de Fourier inversa de:

$$X(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1, & |\Omega| \leq \omega \\ 0, & \omega < |\Omega| < \pi \end{cases}$$

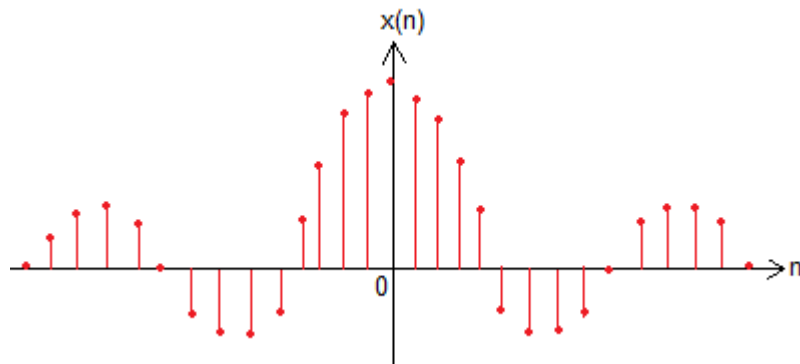


$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega}^{\omega} e^{j\Omega n} d\Omega$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi nj} e^{j\Omega n} \frac{\omega}{-\omega}, n \neq 0; \frac{1}{2\pi nj} [e^{j\omega n} - e^{-j\omega n}]$$

$$x(n) = \frac{1}{\pi n} \text{sen}(\omega n), \quad n \neq 0, \text{ para } n = 0, x(0) = \frac{\omega}{\pi}$$

$$x(n) = \frac{\omega}{\pi} \text{senc}\left(\frac{\omega n}{\pi}\right)$$



d. Señales no periódicas en tiempo continuo: Transformada de Fourier

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega; \text{ Transformada de Fourier inversa}$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt; \text{ Transformada de Fourier}$$

La FT convierte la señal en el dominio del tiempo en el dominio de la frecuencia.

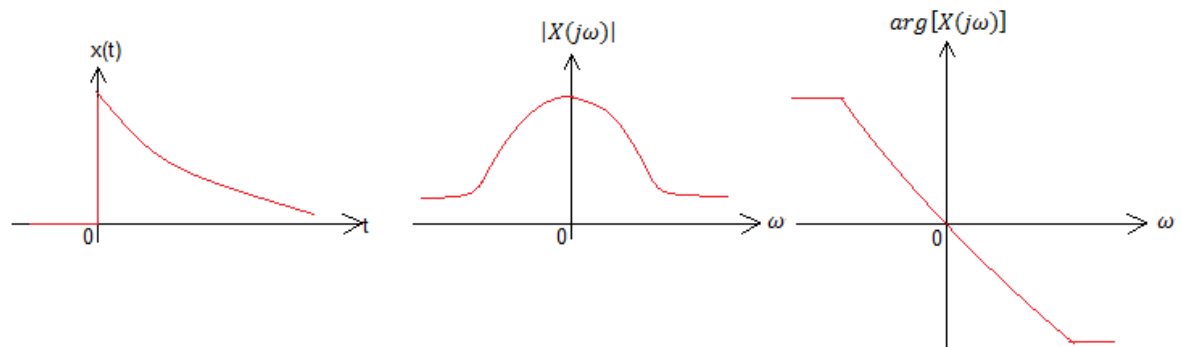
Ejemplo

$$x(t) = e^{-at} u(t); \quad a > 0 \text{ (converge)}$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} u(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt = -\frac{1}{a+j\omega} e^{-(a+j\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a+j\omega}$$

Forma polar:

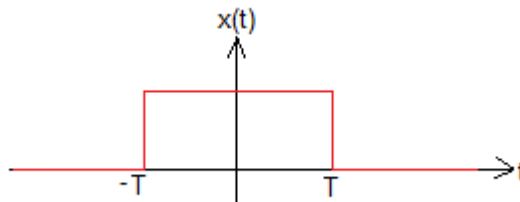
$$|X(j\omega)| = \frac{1}{(a^2 + \omega^2)^{1/2}}; \arg[X(j\omega)] = -\arctan\left(\frac{\omega}{a}\right)$$



Ejemplo

$x(t) = \text{Pulso rectangular}$

$$x(t) = \begin{cases} 1, & -T \leq t \leq T \\ 0, & |t| > T \end{cases}$$



$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-T}^T e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-T}^T$$

$$X(j\omega) = -\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega T} + \frac{1}{j\omega} e^{j\omega T} = \frac{1}{j\omega} [e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}]$$

$$X(j\omega) = \frac{2}{\omega} \sin(\omega T)$$

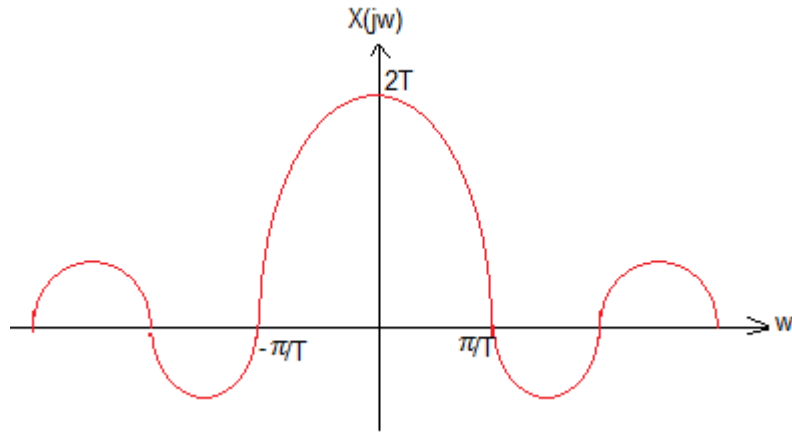
Para $\omega = 0 \rightarrow X(j\omega) = \int_{-T}^T dt = 2T$

También se puede hacer, aplicando la regla del L'Hopital:

$$\text{Si } f(c) = g(c) = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{2}{\omega} \sin(\omega T) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{2T \cos(\omega T)}{1} = 2T$$

$$X(j\omega) = 2Ts \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{\pi}\right)$$



PROPIEDADES DE LAS REPRESENTACIONES DE FOURIER

a) Linealidad

- Periódicas en el tiempo discreto:

$$Z(n) = ax(n) + by(n) \xleftrightarrow{DTFS} Z(k) = aX(k) + by(k)$$

$$x(n) = \sum_{k=-N}^N X(k) e^{jk\Omega_0 n} \xleftrightarrow{DTFS} X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=-N}^N x(n) e^{-jk\Omega_0 n}$$

- Periódicas en el tiempo continuo:

$$Z(t) = ax(t) + by(t) \xleftrightarrow{FS} Z(k) = aX(k) + by(k)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k) e^{jk\omega_0 t} \xleftrightarrow{FS} X(k) = \frac{1}{T} \int x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

- No periódicas en tiempo discreto:

$$Z(n) = ax(n) + by(n) \xleftrightarrow{DTFT} Z(e^{j\Omega}) = aX(e^{j\Omega}) + by(e^{j\Omega})$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} \xleftrightarrow{DTFT} X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n}$$

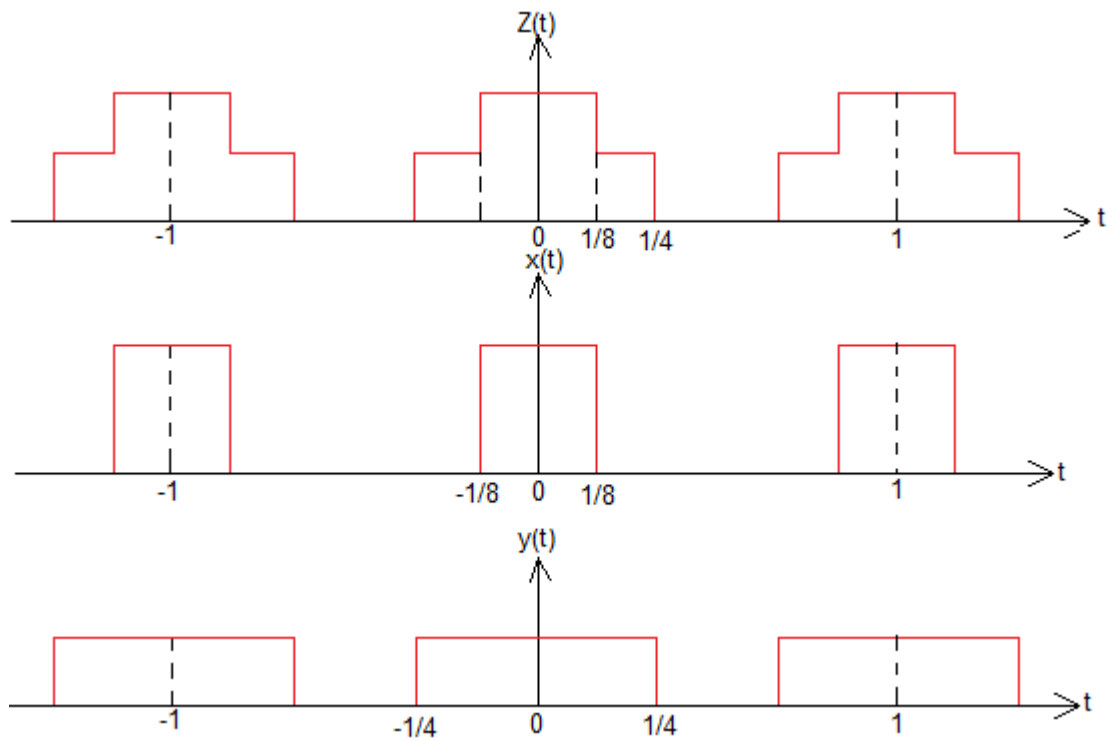
- No periódicas en tiempo continuo

$$Z(t) = ax(t) + by(t) \xleftrightarrow{FT} Z(j\omega) = aX(j\omega) + bY(j\omega)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \xleftrightarrow{FT} X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Ejemplo

Señal periódica continua:



$$z(t) = \frac{2}{3}x(t) + \frac{1}{2}y(t); x(t) \rightarrow X(k); y(t) \rightarrow Y(k)$$

$$x(k) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt; T = 1, \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$$

$$x(k) = \frac{1}{1} \int_{-1/8}^{1/8} 1 \cdot e^{-jk2\pi t} dt = -\frac{1}{j2\pi k} [e^{-jk2\pi t}]_{-1/8}^{1/8}$$

$$X(t) = -\frac{1}{j2\pi k} [e^{-jk\frac{\pi}{4}t} - e^{jk\frac{\pi}{4}t}] = \frac{1}{\pi k} \text{sen} \left(\frac{\pi}{4}k \right); X(0) = \frac{1}{4}$$

$$Y(k) = \frac{1}{k\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right); Y(0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{\pi} = \frac{1}{2}$$

$$Z(k) = \frac{3}{2\pi k} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{4}\right) + \frac{1}{2\pi k} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right); Z(0) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8}$$

b) Simetría

Para una señal $x(t)$ real, esto es, $x(t) = x^*(t)$ la parte real de la representación de Fourier tiene simetría par y por la parte imaginaria simetría impar.

Ejemplo: Periódicos en el tiempo continuo.

$$FS: X * (k), \quad \operatorname{Re}[X(k)] = \operatorname{Re}[X(-k)]$$

$$\operatorname{Im}[X(k)] = -\operatorname{Im}[X(-k)]$$

Para una señal $x(t)$ puramente imaginaria $x(t) = -x^*(t)$ la parte real de Fourier tiene simetría impar y la parte imaginaria tiene simetría par.

Ejemplo: No periódica en el tiempo continuo

$$FT: X * (j\omega) = -X(j\omega), \quad \operatorname{Re}[X(j\omega)] = -\operatorname{Re}[X(-j\omega)]$$

$$\operatorname{Im}[X(j\omega)] = \operatorname{Im}[X(-j\omega)]$$

c) Corrimiento en el tiempo

$$x(t - t_0) \xleftrightarrow{FS} e^{-jk\omega_0 t_0} X(k)$$

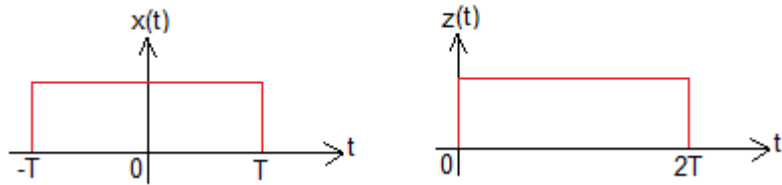
$$x(n - n_0) \xleftrightarrow{DTFS} e^{-jk\Omega_0 n_0} X(j\Omega)$$

$$x(t - t_0) \xleftrightarrow{FT} e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$$

$$x(n - n_0) \xleftrightarrow{DFFT} e^{-j\Omega t_0} X(j\Omega)$$

Ejemplo

$$z(t) = x(t - T)$$



$$Z(j\omega) = e^{-j\omega T} X(j\omega); \quad X(j\omega) = \frac{2\text{sen}(\omega T)}{\omega}$$

$$Z(j\omega) = e^{-j\omega T} * \frac{2\text{sen}(\omega T)}{\omega}$$

d) Corrimiento en frecuencia

$$e^{jk_0\omega_0 t} x(t) \xleftrightarrow{FS} X(k - k_0)$$

$$e^{jk_0\Omega_0 n} x(n) \xleftrightarrow{DTFS} X(k - k_0)$$

$$e^{j\gamma t} x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j(\omega - \gamma))$$

$$e^{j\gamma n} x(n) \xleftrightarrow{DTFT} X(j(\Omega - \gamma))$$

Ejemplo

Determinar la FT del pulso Senoidal complejo

$$Z(t) = \begin{cases} e^{j10t}, & |t| \leq \pi \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Sea $x(t) = 1, |t| \leq \pi$ pulso rectangular

$$X(j\omega) = \frac{2}{\omega} \text{sen}(\omega\pi)$$

Aplicando corrimiento en frecuencia:

$$Z(j\omega) = X(j(\omega - 10)) = \frac{2}{\omega - 10} \text{sen}((\omega - 10)\pi)$$

e) Escalonamiento

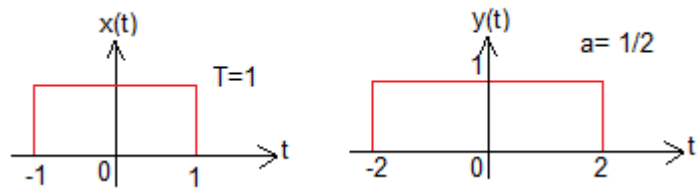
- No periódica continua: FT

$$z(t) = x(at) \rightarrow Z(j\omega) = \frac{1}{|a|} X\left(j\frac{\omega}{a}\right)$$

Ejemplo

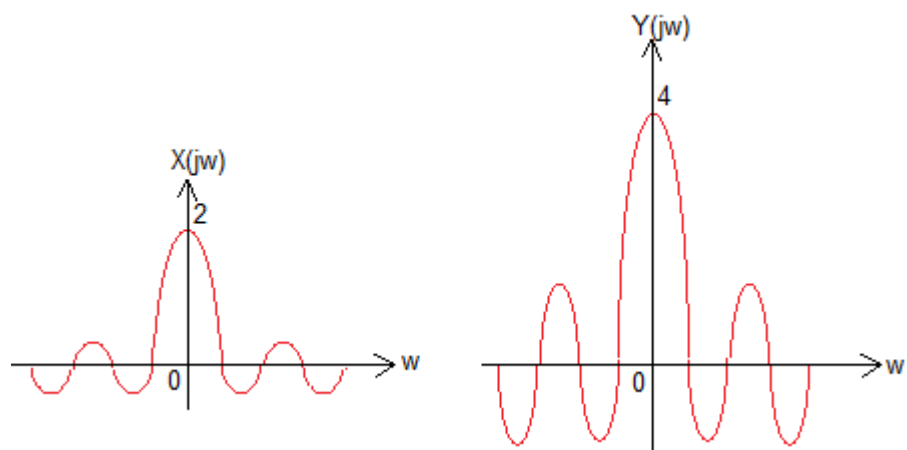
$x(t)$ Es el periodo rectangular, $y(t) = x\left(\frac{1}{2}t\right)$

$$x(t) = 1, |t| \leq 1 ; \quad y(t) = 1, \quad |t| \leq 2$$



$$X(j\omega) = \frac{2}{\omega} \text{sen}(\omega) \rightarrow Y(j\omega) = \frac{1}{\frac{1}{2}} X\left(j\frac{\omega}{\frac{1}{2}}\right); x(0) = 2$$

$$Y(j\omega) = 2X(j2\omega) = 2 * \frac{2}{2\omega} \text{sen}(2\omega) = \frac{2}{\omega} \text{sen}(2\omega)$$



- Señal periódica continua: FS

$$z(t) = x(at) \rightarrow Z(k) = X(k)$$

Los coeficientes de $x(t)$ y $x(at)$ son idénticas, cambia el espaciamiento armónico de ω_0 a $a\omega_0$.

- f) Diferenciación e integración
 - Diferenciación en el tiempo:

- a. Señal no periódica $x(t)$: FT

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} dt$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) j\omega e^{j\omega t} dt$$

$$\frac{d}{dt} x(t) \xleftrightarrow{FT} j\omega X(j\omega)$$

Ejemplo

$$\frac{d}{dt} (e^{-at}) \xleftrightarrow{FT} \frac{j\omega}{a + j\omega}$$

- b. Señal periódica continua $x(t)$: FS

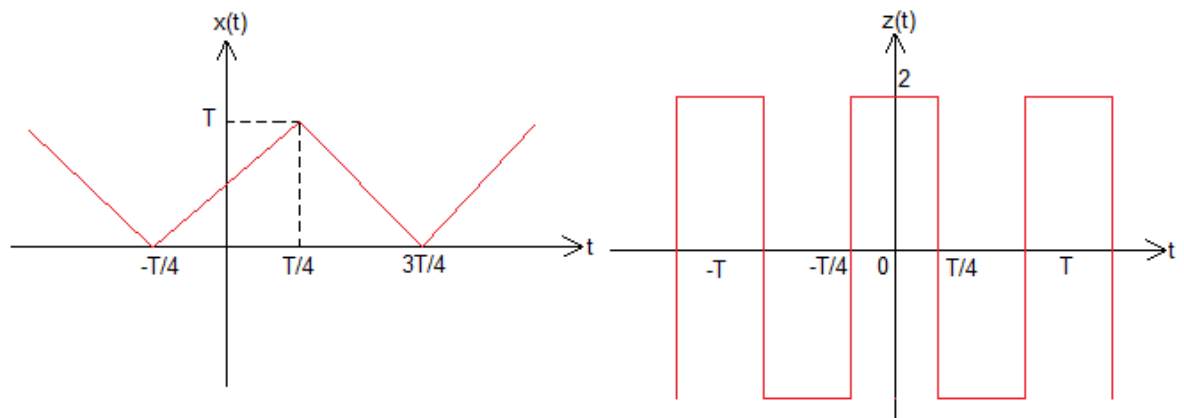
$$x(t) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} X(k) e^{jk\omega_0 t}$$

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k) jk\omega_0 e^{jk\omega_0 t}$$

$$\frac{d}{dt} x(t) \xleftrightarrow{FS} jk\omega_0 X(k)$$

Ejemplo

Hallar la representación de Fourier FS de una señal triangular



$$z(t) = \frac{d}{dt} x(t)$$

FS para una señal cuadrada:

$$F(k) = \frac{1}{T} \int f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/4}^{T/4} 4 * e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$F(k) = \left[-\frac{4}{Tjk\omega_0} e^{-jk\omega_0 t} \right]_{-T/4}^{T/4}$$

$$F(k) = \frac{4}{Tjk\omega_0} [e^{jk\omega_0 T/4} - e^{-jk\omega_0 T/4}]$$

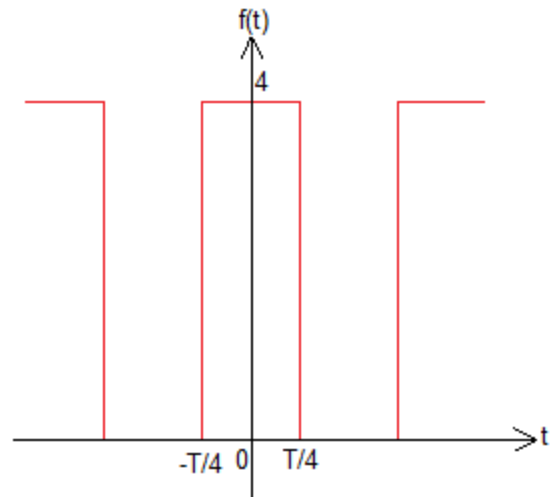
$$F(k) = \frac{8}{Tk\omega_0} \text{sen}\left(\frac{k\omega_0 T}{4}\right); \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \rightarrow \omega_0 T = 2\pi$$

$$F(k) = \frac{4 \text{sen}(k \frac{\pi}{2})}{k\pi}; F(0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{4 \frac{\pi}{2} \cos(k \frac{\pi}{2})}{\pi} = 2$$

$$z(t) = f(t) - 2 \rightarrow Z(k) = F(k) - \delta(k), \quad Z(0) = 2 - 2 = 0$$

$$Z(k) = \begin{cases} \frac{4 \text{sen}(k \frac{\pi}{2})}{k\pi}, & k \neq 0 \text{ (si } k \neq 0 \rightarrow \delta(k) = 0) \\ 0, & k = 0 \end{cases}$$

$$z(t) = \frac{d}{dt} x(t) \stackrel{FS}{\leftrightarrow} jk\omega_0 X(k) = Z(k)$$



$$\text{Para } k \neq 0 \rightarrow X(k) = \frac{4 \operatorname{sen}(k \frac{\pi}{2})}{jk^2 \pi \omega_0}$$

$$k = 0 \rightarrow x(0) = \frac{T}{2} \rightarrow X(0) = \frac{\pi}{\omega_0}; (T = \frac{2\pi}{\omega_0})$$

- Diferenciación en frecuencia: FT

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\frac{d}{d\omega} X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} -jt * x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$-jt * x(t) \stackrel{FT}{\leftrightarrow} \frac{d}{d\omega} X(j\omega)$$

- Integración

Se aplica solo a variables continuas.

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \stackrel{FT}{\leftrightarrow} \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(j_0) \delta(\omega)$$

Ejemplo

$$\text{Escalón unitario: } u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau; \delta(t) \stackrel{FT}{\leftrightarrow} 1$$

$$u(t) \stackrel{FT}{\leftrightarrow} U(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega)$$

- g) Convolución y modulación

- Convolución no periódica tiempo continuo: FT

$$x(t) y h(t); y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau$$

$$Y(j\omega) = X(j\omega) H(j\omega)$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Ejemplo

$$x(t) = \frac{\text{sen}(\pi t)}{\pi t}; \quad h(t) = \frac{\text{sen}(2\pi t)}{\pi t}$$

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$x(t) \stackrel{FT}{\leftrightarrow} \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \pi \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} = X(j\omega)$$

$$h(t) \stackrel{FT}{\leftrightarrow} \begin{cases} 1, & |\omega| \leq 2\pi \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} = H(j\omega)$$

$$y(t) = x(t) * h(t) \stackrel{FT}{\leftrightarrow} Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$$

$$Y(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \pi \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Modulación

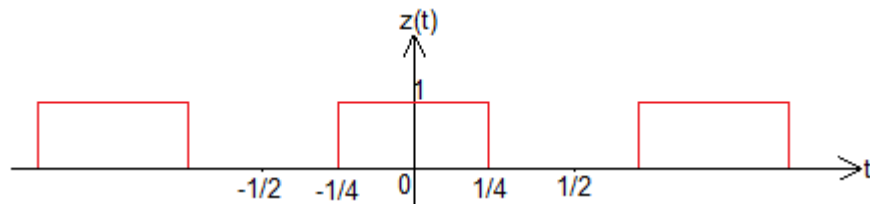
$x(t)$ y $z(t)$ Son señales no periódicas $y(t) = x(t)z(t)$, donde:

$$y(t) = x(t)z(t) \stackrel{FT}{\leftrightarrow} Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * Z(j\omega)$$

La multiplicación en el dominio del tiempo conduce a la convolución en el dominio de la frecuencia.

Ejemplo

Encontrar la Convolución periódica de la señal senoidal $x(t) = 2 \cos(2\pi t) + \text{sen}(4\pi t)$ con la onda cuadrada $z(t)$.



$$y(t) = x(t) * z(t)$$

Propiedad de la Convolución: $Y(k) = X(k)Z(k)$

$$X(k) = \begin{cases} 1, & k = \pm 1 \\ \frac{1}{2j}, & k = 2 \\ -\frac{1}{2j}, & k = -2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$* X(k) = \frac{1}{T} \int x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt; \omega_0 = \frac{2\pi}{T}; T = 1 \rightarrow \omega_0 = 2\pi$$

$$Z(k) = \frac{1}{T} \int_{-1/4}^{1/4} 1 \cdot e^{-jk2\pi t} dt = \frac{\text{sen}\left(k\frac{\pi}{2}\right)}{k\pi}$$

$$Y(k) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & k = \pm 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \text{ Solo hay en } k = \pm 1; Z(k) = \frac{\text{sen}\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)}{\pm\pi} = \frac{1}{\pi}$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y(k) e^{jk\omega_0 t}; \omega_0 = 2\pi$$

$$y(t) = Y(-1)e^{-j2\pi t} + Y(1)e^{j2\pi t} = \frac{1}{\pi}(e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t})$$

$$y(t) = \frac{1}{\pi}(2 \cos(2\pi t)) = \frac{2}{\pi} \cos(2\pi t)$$

$$* x(t) = \sum X(k) e^{k\omega_0 t}; \omega_0 = 2\pi$$

$$x(t) = \sum X(k) e^{k2\pi t}$$

$$x(t) = 2 \cos(2\pi t) + \text{sen}(4\pi t) = e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t} + \frac{1}{2j} e^{j4\pi t} - \frac{1}{2j} e^{-j4\pi t}$$

$$X(1) = 1; X(-1) = 1; X(2) = \frac{1}{2j}; X(-2) = -\frac{1}{2j}$$

Transformada rápida de Fourier – FFT

Para una señal discreta de entrada $x(n)$, la DFT (Transformada de Fourier Discreta) es:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}; x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

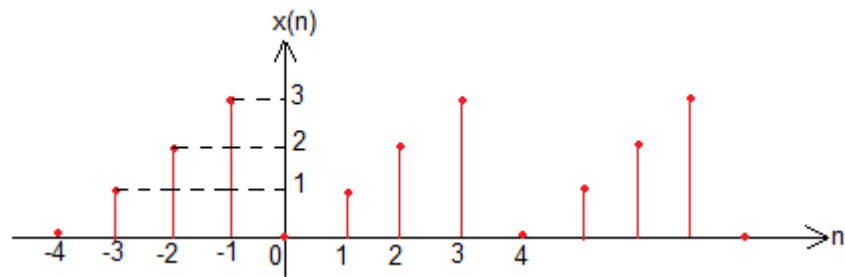
$$Si \ W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \quad x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}$$

$$X(k) = DFT[x(n)]; x(n) = IDFT [X(k)]$$

Ejemplo

Hallar la DFT de la señal periódica discreta de la figura, $x(n)$


$$N = 4 \text{ (Período)}$$

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}; \text{ para } N = 4; W_N^k = e^{-j\frac{2\pi}{N}k} \rightarrow W_4^k = e^{-j\frac{\pi}{2}k}$$

$$W_4^1 = e^{-j\frac{\pi}{2}(1)} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - j\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 - j = -j$$

$$W_4^0 = e^{-j\frac{\pi}{2}(0)} = 1$$

$$W_4^2 = W_4^1 W_4^1 = (-j)(-j) = -1$$

$$W_4^3 = W_4^2 W_4^1 = (-1)(-j) = j$$

$$W_4^4 = W_4^3 W_4^1 = (j)(-j) = 1$$

$$N = 4 \rightarrow W_4^6 = W_4^2; \quad W_4^9 = W_4^1$$

$$X(0) = \sum_{n=0}^{4-1} x(n)W_4^{0(n)} = x(0) + x(1) + x(2) + x(3) = 0 + 1 + 2 + 3 = 6$$

$$X(1) = \sum_{n=0}^{4-1} x(n)W_4^{1(n)} = x(0)W_4^0 + x(1)W_4^1 + x(2)W_4^2 + x(3)W_4^3$$

$$= 0(1) + 1(-j) + 2(-1) + 3(j) = -2 + 2j$$

$$X(2) = \sum_{n=0}^{4-1} x(n)W_4^{2(n)} = x(0)W_4^0 + x(1)W_4^2 + x(2)W_4^4 + x(3)W_4^6$$

$$= 0(1) + 1(-1) + 2(1) + 3(-1) = -2$$

$$X(3) = \sum_{n=0}^{4-1} x(n)W_4^{3(n)} = x(0)W_4^0 + x(1)W_4^3 + x(2)W_4^6 + x(3)W_4^9$$

$$= 0(1) + 1(j) + 2(-1) + 3(-j) = -2 - 2j$$

Se realizan 4×4 multiplicaciones $= N^2$ (Suma de productos) si se tiene una señal senoidal de 1000 muestras $\rightarrow$ el número de multiplicaciones sería $1000^2 = 1'000.000$ de sumas y productos.

Una forma de reducir el número de operaciones es utilizar el algoritmo de la FFT de Cooley- Tukey es romper la transformada en transformadas más pequeñas y luego combinarlos para obtener la transformada total.

El algoritmo más popular es hacer la decimación en el tiempo, esto es romper la transformada de N puntos en dos transformadas de $N/2$ puntos, luego la transformada de $N/2$ en dos transformadas de $N/4$ puntos, continuamos el proceso en potencias de 2 hasta llegar a transformadas de dos puntos.

Pares: $x(0), x(2), x(4), \dots, x(N-2) \rightarrow \frac{N}{2}$ puntos o muestras

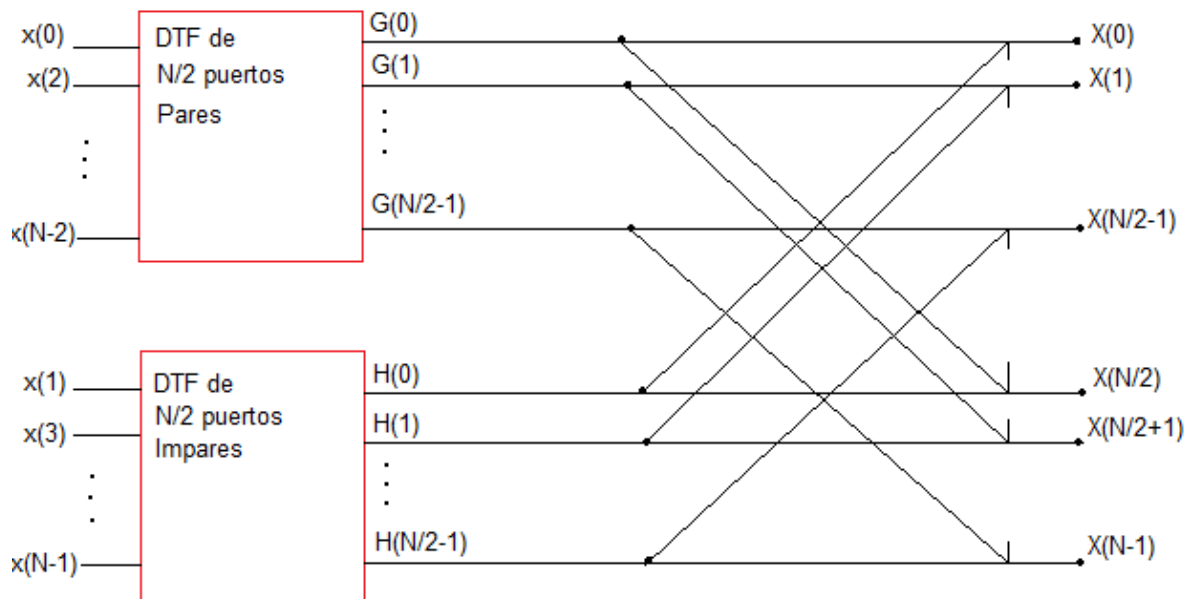
Impares: $x(1), x(3), x(5), \dots, x(N-1) \rightarrow \frac{N}{2}$ puntos o muestras

Al aplicarle DFT por separado:

$$X(k) = \underbrace{G(k)}_{Par} + W_N^k \underbrace{H(k)}_{Impar}$$

$$X(0) = G(0) + W_N^0 H(0), X\left(\frac{N}{2}\right) = \delta(0) + W_N^{\frac{N}{2}} G(0)$$

$$X(1) = G(1) + W_N^1 H(1) \dots$$



$$\# \text{ multiplicaciones} = \left(\frac{N}{2}\right)^2 + \left(\frac{N}{2}\right)^2 + N = N + \frac{N^2}{2} = 4 + \frac{16}{2} = 12 < N^2; \text{ con } N = 4$$

Si $N = 8 \rightarrow$

$$\# \text{ multiplicaciones} = 4 \left(\frac{N}{4}\right)^2 + 2 \left(\frac{N}{2}\right) + N = \frac{N^2}{4} + 2N = \frac{8^2}{4} + 2 * 8 = 32 < 64 = N^2$$

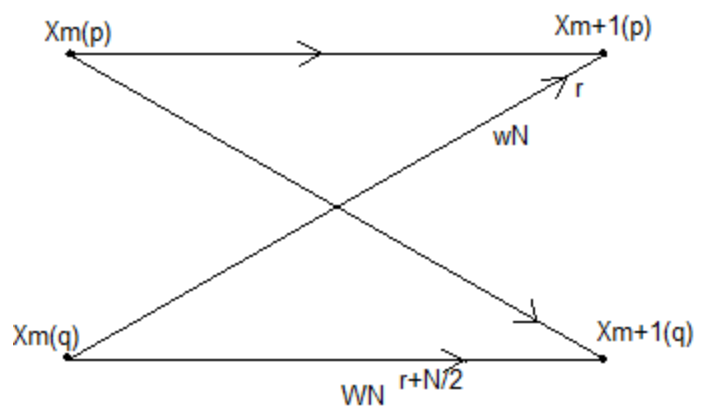
El algoritmo de la FFT el numero de las multiplicaciones a $\frac{N}{2} \lg(2N)$

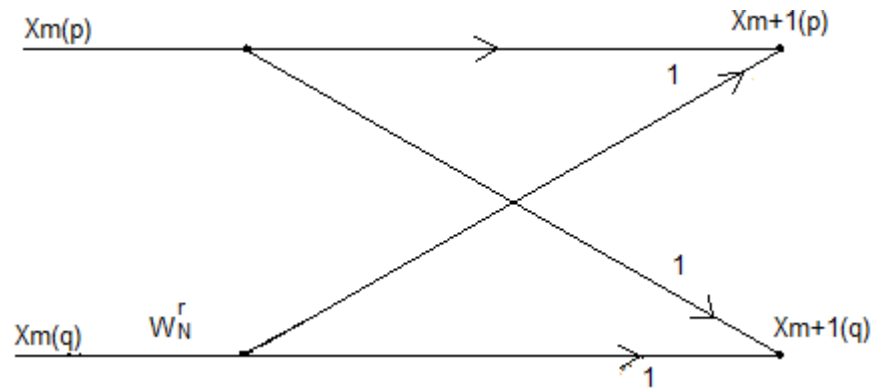
$$X_{m+1}(p) = X_m(p) + W_N^r X_m(q)$$

$$X_{m+1}(q) = X_m(p) + W_N^{r+N/2} X_m(q)$$

$$W_N^{r+N/2} = W_N^r * W_N^{N/2} = W_N^r e^{-j\frac{2\pi}{N} \cdot \frac{N}{2}}$$

$$W_N^{r+N/2} = W_N^r e^{j\pi} = -W_N^r$$





Ejemplo: reatlels

$a = [0 \ 1 \ 2 \ 3];$

$fft(a)$

$ans = 6$

$-2 + 2i$

-2

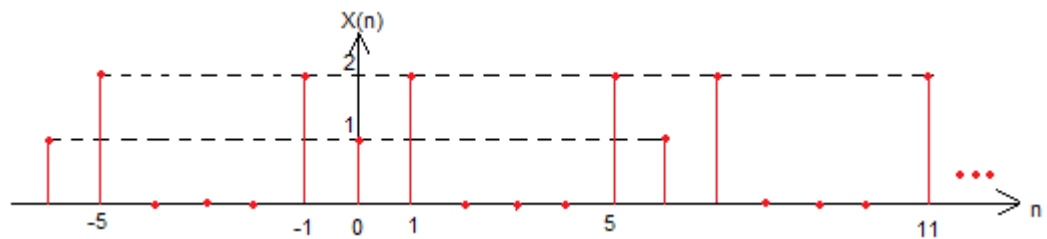
$-2 - 2i$

EJERCICIOS: FOURIER

1. Determinar los coeficientes de Fourier de la señal (DTFS)

$$X(n) = 1 + \text{sen}\left(\frac{\pi n}{12} + \frac{3\pi}{8}\right)$$

2. Determinar los coeficientes de Fourier de la señal (DTFS)



3. Para los siguientes coeficientes de Fourier DTFS hallar la señal en el tiempo $X(n)$.

$$X(k) = \cos\left(\frac{6\pi}{17}k\right)$$

4. Determinar los coeficientes de Fourier FS de la señal continua.

$$X(t) = 2\sin(2\pi t - 3) + \sin(6\pi t)$$

5. Grafique los espectros de magnitud y fase de (FS).

$$X(t) = \sin(2\pi t) + \cos(3\pi t)$$

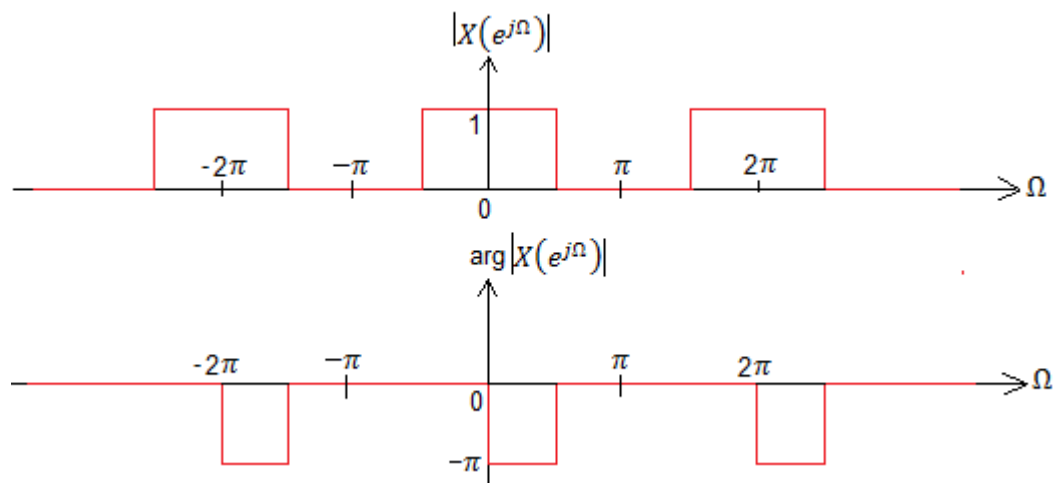
6. Determinar la señal $X(t)$ según FS, si:

$$X(k) = j\delta(k-1) - j\delta(k+1) + \delta(k-3) + \delta(k+3); \omega_o = \pi$$

7. Encuentre la transformada Fourier discreta (DTFT) inversa de:

$$X(e^{j\Omega}) = 2\cos(2\Omega)$$

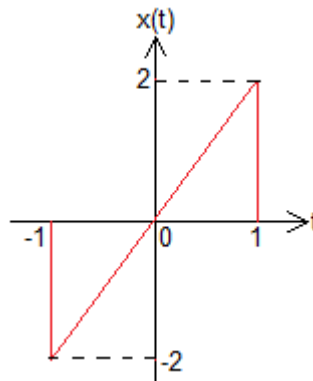
8. Determinar la señal en el dominio del tiempo correspondiente a la siguiente DTFT



9. Determinar la FT (Transformada de Fourier) inversa de:

$$X(j\omega) = \begin{cases} 2\cos\omega, & |\omega| \leq \pi \\ 0, & |\omega| > \pi \end{cases}$$

10. Determinar la FT de la señal en el tiempo continuo



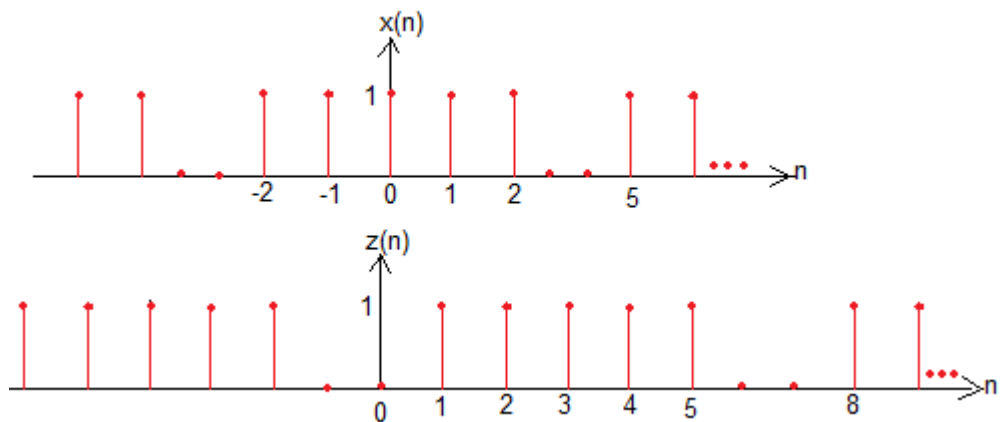
EJERCICIOS: PROPIEDADES DE FOURIER

1. Encuentre la TF inversa utilizando fracciones parciales de:

$$X(j\omega) = \frac{j\omega + 1}{(j\omega)^2 + 5j\omega + 6}; \text{Linealidad}$$

Sugerencia: $x(t) = e^{-at} \xleftrightarrow{TF} X(j\omega) = \frac{1}{j\omega + a}$

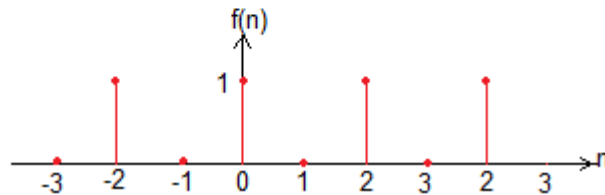
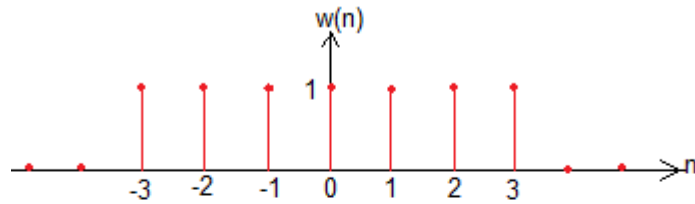
2. Utilizando corrimiento de tiempo hallar Z(k) (DTFS)



Sugerencia:

$$\sum_{n=-M}^M e^{-k\Omega_0 n} = \frac{\text{sen}\left(\frac{k\pi}{N}(2M+1)\right)}{\text{sen}\left(\frac{k\pi}{N}\right)}; \Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

3. Use la propiedad de escalonamiento para determinar la DTFT de la señal $f(n)$



4. Usando corrimiento en frecuencia calcular la FT de:

$$x(t) = \text{sen}(2\pi t)e^{-t}$$

5. Usando diferenciación calcular FT de:

$$x(t) = \frac{d}{dt} t e^{-2t} \text{sen}(t)$$

6. Usando Convolución calcular la FT inversa de:

$$X(j\omega) = \frac{2\text{sen}(\omega)}{\omega(j\omega + 2)}$$

Sugerencia:

$$Si(j\omega) = \frac{2\text{sen}(\omega)}{\omega} \rightarrow si(t) = 1, |t| \leq 1$$