CÁLCULO CON SCILAB

INTRODUCCIÓN

Este curso de cálculo contiene las unidades referentes a límites, derivadas, integrales y sus aplicaciones. Los ejemplos tratados se han realizado teóricamente pero también se han desarrollado o simulado con el programa SCILAB que es un software libre que los interesados pueden descargarlo de www.scilab.com/download.

1. LÍMITES

El límite de una función **f(x)** cuando **x** tiende a a es **L**, quiere decir que cuando x se acerca suficientemente a a, f(x) se acerca arbitrariamente a L. Se escribe de la forma:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

1.1 LÍMITE DE UNA CONSTANTE

El límite de una constante es igual a la constante,

$$\lim_{x \to a} c = c$$

Ejemplo:

$\lim_{x \to 3} 8 = 8$

1.2 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Si f(x) es un polinomio y a es un número real, entonces,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Ejemplos:

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^3+2x^2-3x+5}{2x-3}=\frac{3(2^3)+2(2^2)-3(2)+5}{2(2)-3}=\frac{3(8)+2(4)-6+5}{4-3}=31$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^{2/3}+5\sqrt{x}}{x^2-2}=\frac{5^{2/3}+5\sqrt{5}}{5^2-2}=\frac{2.9+11.2}{23}=0.61$$

TEOREMA

El límite de una función cuya variable tiende al infinito se calcula dividiendo cada uno de los términos por el elemento de mayor exponente. Recordar que:

$\frac{1}{\infty}=0,\qquad \infty^n=\infty,\qquad n*\infty=\infty,\qquad \frac{a}{0}=\infty$

Ejemplo:

$$\lim_{x\to\infty} x^3+2x^2-3=\infty^3+2(\infty)^2-3=\infty$$

Ejemplo:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3}{x+2}=\lim_{x\to\infty}\quad\frac{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{3}{x^2}}{\frac{x}{x^2}+\frac{2}{x^2}}=\frac{\frac{2}{1}-\frac{3}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}=\frac{\frac{2}{1}-\frac{3}{\infty}}{\frac{1}{\infty}+\frac{2}{\infty}}=\frac{2-0}{0+0}=\frac{2}{0}=\infty$$

Ejemplo:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3}{x^3+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^3}-\frac{3}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{2}{x^3}}=\frac{\frac{2}{x}-\frac{3}{x^3}}{\frac{1}{1}+\frac{2}{x^3}}=\frac{\frac{2}{\infty}-\frac{3}{\infty}}{1+\frac{2}{\infty}}=\frac{0-0}{1+0}=\frac{0}{1}=0$$

Ejemplo:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3}{x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2}{x^2}}=\frac{\frac{2}{1}-\frac{3}{\infty}}{\frac{1}{1}+\frac{2}{\infty}}=\frac{2-0}{1+0}=\frac{2}{1}=2$$

2. DERIVADAS

La derivada de una función y=f(x) con respecto a x, es igual a la variación infinitesimal de la función con respecto a x.

Si y=f(x), entonces,

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Ejemplo:

Calcular la derivada de la función $y=f(x)=x^2$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \frac{x^2 + 2x * \Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x}$$

Ejemplo:

$$\frac{2x * \Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x = 2x + 0 = 2x$$

2.1 DERIVADA DE UNA CONSTANTE

La derivada de una constante es cero. **f(x)=c**, entonces **f'(x)=0**

Ejemplo:

Hallar la derivada de y=f(x)=5

Si f(x) es una constante entonces, f(x+Δx)=f(x) = 5, por tanto

f(x+Δx)-f(x)=0

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 0$$

2.2 DERIVADA DE UNA POTENCIA

La derivada de una potencia **$f(x)=x^n$** es igual a **$f'(x)=nx^{n-1}$**

Ejemplo:

Hallar la derivada de $y=f(x)=x^5$

$f'(x)=5x^{5-1} = 5x^4$

Ejemplo:

Hallar la derivada de $f(x)=3x^4$

$f'(x)=3(4x^{4-1})=3(4x^3)=12x^3$

Ejemplo:

Hallar la derivada de $y =f(x)=2x^{-2}$

$f'(x)=2(-2x^{-2-1})=2(-2x^{-3})= -4x^{-3}= -4/x^3$

Ejemplo:

Hallar la derivada de

$$y = f(x) = \frac{3}{x^3}$$

$$f(x) = \frac{3}{x^3} = 3x^{-3}$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 3(-3x^{-3-1}) = -9x^{-4} = -9/x^4$$

Ejemplo:

Hallar la derivada de $y=f(x)=3x^4+5x^3-2x^2-6x+2$

$f('(x)=3(4x^3)+5(3x^2)-2(2x)-6+0 = 12x^3+15x^2-4x-6$

2.3 DERIVADA DE UN PRODUCTO

La derivada de un producto de funciones f(x)*g(x)es igual a la derivada del primero f''(x) por el segundo g(x) más el primero f(x) por la derivada del segundo g'(x)

$$\frac{d}{dx}[f(x)*g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Ejemplo:

$y=(2x^2-3x)(x^3-2x^2+3)$

$f(x)=2x^2-3x$, entonces, $f'(x)=4x-3$

$g(x)=x^3-2x^2+3$, entonces, $g'(x)=3x^2-4x+0=3x^2-4x$

$y'= (4x-3)(x^3-2x^2+3)+(2x^2-3x)(3x^2-4x)$

simplificando:

$y'=10x^4-28x^3+18x^2+12x-9$

2.4 DERIVADA DE UN COCIENTE

La derivada de un cociente f(x)/g(x) es igual a:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Ejemplo:

$$y = \frac{2x^3 + 2x}{3x^2 - 2}$$

$f(x)=2x^3+2x$, entonces, $f'(x)=6x^2+2$

$g(x)=3x^2-2$, entonces, $g'(x)= 6x$

$$y' = \frac{(6x^2+2)(3x^2-2)-(2x^3+2x)(6x)}{[3x^2-2]^2}$$

Simplificando:

$$y' = \frac{6x^4-18x^2-4}{9x^4-12x^2+4}$$

Aplicando Scilab:

```
//variable simbólica x

x=poly(0,'x')

// ejemplo

y=x^5;

derivat(y)

//y'=5x^4

// ejemplo

y=3*x^4

derivat(y)

//y'=12x^3

// ejemplo

y=2*x^-2;

D=derivat(y)

simp(D)

//D=-4/x^3

// ejemplo
```

```
y=3/x^3;
D=derivat(y)
simp(D)
//D=-9/x^4
// ejemplo
y=3*x^4+5*x^3-2*x^2-6*x+2;
D=derivat(y)
simp(D)
//y'=-6-4x+15x^2+12x^3
// ejemplo
y=(2*x^2-3*x)*(x^3-2*x^2+3);
D=derivat(y)
simp(D)
//y'=-9+12x+18x^2-28x^3+10x^4
// ejemplo
y=(2*x^3+2*x)/(3*x^2-2);
D=derivat(y)
simp(D)
//y’=(-4-18x^2+6x^4) / (4-12x^2+9x^4)
```

2.5 DERIVACIÓN EN CADENA

Derivación en cadena. Si y=f(u), u=g(x), entonces, la derivada de y con respecto a x es igual a:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Ejemplo:

Si $y = (x^3 - 2x^2 - 4)^4$ hallar su derivada

y=f(u)=u^4, donde u=x^3-2x^2-4

$\frac{du}{dx} = 3x^2 - 4x,$ $\frac{dy}{du} = 4u^3,$ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = 4(x^3 - 2x^2 - 4)^3(3x^2 - 4x)$

Aplicando Scilab,

```
x=poly(0,'x')

y=(x^3-2*x^2-4)^4;

D=derivat(y)

simp(D)
```

2.6 PENDIENTE DE UNA FUNCIÓN

La pendiente de una función en un punto es la derivada en ese punto.

Ejemplo:

Hallar la pendiente de la función y=2x^2 en el punto x=3. Hacer las gráficas.

Para x=3, entonces, y=2$(3)^2$ = 18 el punto es P(3,18)

La pendiente es m=y'=4x = 4(3)=12

Gráficamente la pendiente es la tangente de la recta que pasa por ese punto, su función se obtiene de:

y-y1=m(x-x1), donde x1=3, y1=18

y-18=12(x-3), entonces, y=12x-36+18, y=12x-18

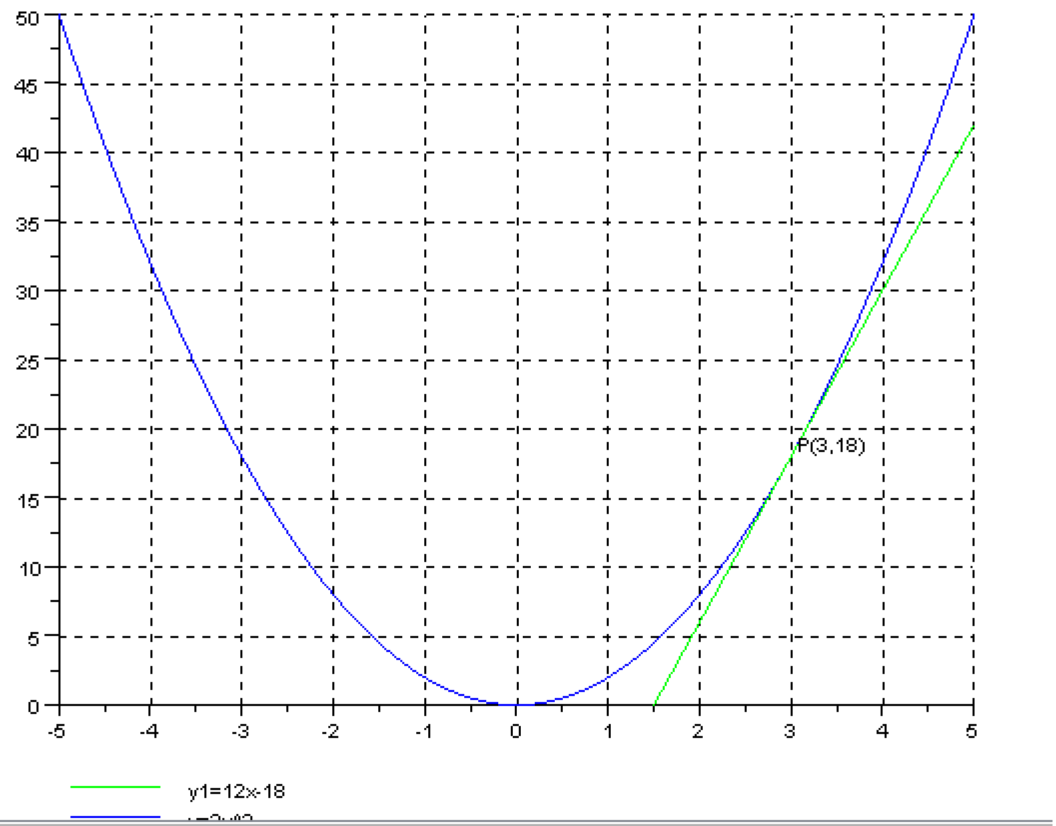
Por Scilab,

// cálculo de la pendiente en x=3

```
function y=f(x)

y=2*x^2;

endfunction

x=3;

derivative(f,x)

//Respuesta: m=12
```

// gráfica de la parábola $y=2x^2$ y de la recta y1=12x-18

```
x=[-5:0.1:5];

y=2*x^2;

y1=12*x-18;

plot2d(x,[y' y1'],[2,3],leg="y1=12x-18@y=2x^2",rect=[-5 0 5 50])

xgrid

xstring(3,18,["P(3,18)"])
```



2.7 DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Una función es implícita cuando para encontrar su y=f(x) se tiene que despejar de la ecuación, por ejemplo:

$2x^2 - 3y = 4$ es una función implícita. Su valor es igual a

$2x^2-4 = 3y$, o sea, $y=f(x)=(1/3)(2x^2-4)$

Ejemplo:

Para la siguiente ecuación: $y^3 – 2y^2 + 4x = x^2 – 2$, hallar la derivada $y’= f’(x)$

Derivando la expresión, se tiene,

$3y^2 y’ – 4y\, y’ + 4 = 2x – 0$,   factorizando y’ y' ($3y^2$ – 4y) = 2x – 4, despejando

$$y' = \frac{2x-4}{3y^2-4y}$$

2.8 PUNTOS CRÍTICOS DE UNA FUNCIÓN

Para encontrar los puntos críticos de una función f(x) se realiza su correspondiente derivación f'(x) y se iguala a cero. Los valores de x que cumplen con esta solución son los puntos críticos.

Ejemplo:

Sea f(x) = - x^4 +2x^2 +12, su derivada es,

f'(x) = - 4x^3 + 4x, igualando a cero, - 4x^3 + 4x = 0, factorizando,

-4x(x^2 – 1) = 0, los valores para los cuales se cumple, son

x = 0, x = 1, x = -1

Estos son los puntos críticos, que tienen su derivada igual a cero, o sea, su pendiente = 0 (recta horizontal en el punto)

2.9 MÁXIMO, MÍNIMO E INFLEXIÓN

Un punto crítico puede ser un valor máximo de la función, un valor mínimo o ni lo uno ni lo otro que se conoce como punto de inflexión.

Resolver este problema implica calcular la segunda derivada de la función, esto es, la derivada de la primera derivada y considerar lo siguiente:

Si f''(x) > 0 estamos en un punto mínimo

Si f''(x) < 0 estamos en un punto máximo y

Si f''(x) = 0 es un punto de inflexión

Ejemplo:

Continuando con el ejemplo anterior,

Primera derivada: $f'(x) = -4x^3 +4x$

Segunda derivada $f''(x) = -12x^2 +4$

Reemplazando los valores de los puntos críticos,

Para x = 0, $f''(0)= -12(0)^2 +4 = 4 > 0$ es un punto mínimo

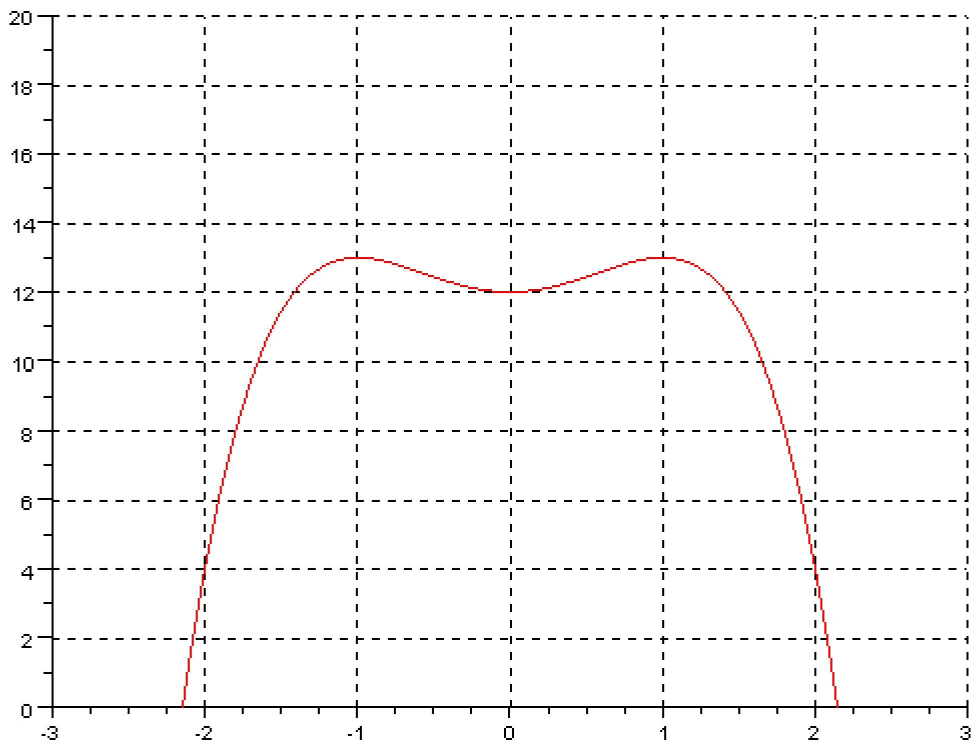
Para x = 1, $f''(1)= -12(1)^2 +4 = -8 < 0$ es un máximo

Para x = -1, $f''(-1)= -12(-1)^2 +4 = -8$ es un mínimo

Programa en Scilab:

```
// cálculo de máximo y mínimos

// variable simbólica x

x=poly(0,'x')

fx=-x^4+2*x^2+12;

// primera derivada

df=derivat(fx)

// df=-4x^3+4x

// cálculo de puntos críticos

p=[-4 0 4 0];

r=roots(p)

//puntos críticos=0 -1 1

//cálculo de la segunda derivada

d2f=derivat(dy)

//d2f=-12x^2+4

//cálculos de d2y en los puntos críticos

x=0;

d2f0=-12*x^2+4

x=1;
```

```
d2f1=-12*x^2+4

x=-1;

d2fm1=-12*x^2+4

//d2f(0)=4, d2f(1)=-8, d2f(-1)=-8

//gráfica de la función

x=[-3:0.1:3];

fx=-x^4+2*x^2+12;

plot2d(x,fx',5,rect=[-3 0 3 20])

xgrid
```



2.10 FUNCIONES LOGARÍTMICAS Y EXPONENCIALES

La derivada con respecto a x de una función logaritmo natural denotada como f(x)= **ln(x)**, está dada por:

$$Dx(lnx) = \frac{1}{x}$$

Si u=g(x), entonces, su derivada es:

$$D_x(lnu) = \frac{1}{u} D_x(u)$$

Ejemplo:

Sea $f(x) = \ln(\sqrt{x^3} + 2)$ Hallar su derivada Dx

$$u = \sqrt{x^3} + 2 = x^{3/2} + 2, entonces, D_x u = (3/2)x^{\frac{1}{2}} = \frac{3\sqrt{x}}{2}$$

$$D_x[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{x^3} + 2} * \frac{3\sqrt{x}}{2} = \frac{3}{2} * \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^3} + 2}$$

PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

a) Ln(a * b) = ln(a) + ln(b)
b) Ln(a / b) = ln(a) - ln(b)
c) Ln(a ^{n}) = n * ln(a)

Ejemplo:

Hallar la derivada de:

$$f(x) = \ln[(x^2 + 1)\sqrt{2x + 1}]$$

Aplicando regla a):

$$f(x) = \ln(x^2 + 1) + ln\sqrt{2x + 1} = \ln(x^2 + 1) + \ln(2x + 1)^{1/2}$$

Aplicando regla c):

$$f(x) = \ln(x^2 + 1) + (1/2)\ln(2x + 1)$$

Derivando:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}(2x) + (1/2)\frac{1}{2x + 1}(2) = \frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{2x + 1}$$

Ejemplo:

Hallar la derivada de:

$$f(x) = ln\sqrt[3]{\frac{x^2 - 1}{2x^2}}$$

Aplicando las reglas b) y c):

$$f(x) = \ln\left(\frac{\mathrm{x}^2 - 1}{2\mathrm{x}^2}\right)^{1/3} = (1/3)[\ln(\mathrm{x}^2 - 1) - \ln(2\mathrm{x}^2)]$$

Derivando:

$$f^{'}(x) = (1/3)[\frac{1}{x^2 - 1}(2x) - \frac{1}{2x^2}(4x)] = \frac{1}{3}\left[\frac{2x}{x^2 - 1} - \frac{2}{x}\right]$$

2.11 FUNCIÓN EXPONENCIAL

La función exponencial es la inversa del logaritmo natural. Se nota como **exp**

$\boldsymbol{f(x) = e^x}$, $\quad donde\ \ e = 2.718281, en\ Scilab\ se\ nota\ como\ \%e$

$f^{'}(x) = e^x$

$\boldsymbol{Si\ u = g(x), entonces, D_x e^u = e^u D_x u\ \ , donde\ D_x u\ es\ la\ derivada\ interna}$

Ejemplo:

Hallar la derivada de la función para x=2:

$$f(x) = e^{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$u = \sqrt{x^2 - 1} = (x^2 - 1)^{1/2}$$

La derivada interna es:

$$D_x u = (1/2)(x^2 - 1)^{-1/2}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$f^{'}(x) = e^u D_x u = e^{\sqrt{x^2 - 1}} * \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{xe^{\sqrt{x^2 - 1}}}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Para x=2;

$$f'(2)=\frac{2e^{\sqrt{4-1}}}{\sqrt{4-1}}=\frac{2e^{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}=6.53$$

Aplicando Scilab:

```
//definición de la función
function y=f(x)
  y=exp(sqrt(x^2-1));
endfunction
//cálculo de la derivada en x=2
df=derivative(f,2)
// df = 6.527
```

2.12 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Las fórmulas para el cálculo de las derivadas de las funciones trigonométricas son:

sen(x)	cos(x)	sen u	cos u D_x u
cos(x)	-sen(x)	cos u	-sen u D_x u
tan(x)	$sec^2(x)$	tan u	sec^2 u D_x u
cot(x)	$-csc^2(x)$	cot u	$-csc^2$ u D_x u
sec(x)	sec(x)tan(x)	sec u	sec u tan u D_x u
csc(x)	-csc(x)cot(x)	csc u	-csc u cot u D_x u

Ejemplo:

Hallar la derivada de la función para x=30^o

$$y=\frac{cosx}{1+senx}$$

Recordando la derivada de un cociente:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

f(x)=cosx, entonces, f'(x)= -senx

g(x)=1+senx, entonces, g'(x)= cosx

reemplazando:

$$y' = \frac{-senx\,(1+senx) - cosx\,cosx}{(1+senx)^2} = \frac{-senx - sen^2x - cos^2x}{(1+senx)^2} = \frac{-senx - 1}{(1+senx)^2}$$

Para x = 30^o:

$$y' = \frac{-sen30 - 1}{(1+sen30)^2} = -0.67$$

Por Scilab:

```
//definición de la función
function y=f(x)
  y=cos(x)/(1+sin(x));
endfunction
//pasar ángulo a radianes
x=30*%pi/180;
//calcular la derivada
dy=derivative(f,x)
// dy = 0.667
```

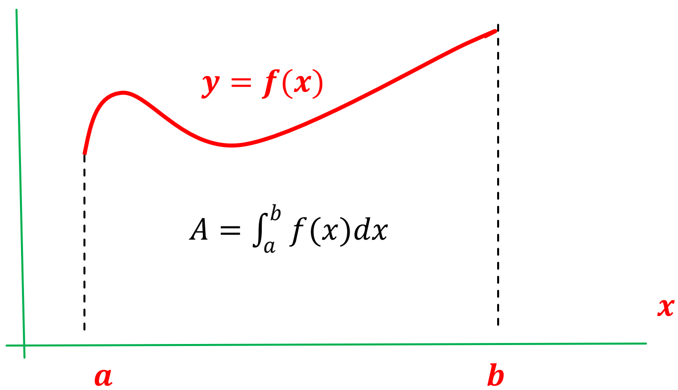
3. INTEGRALES

Es una de las herramientas más importantes del cálculo que permite calcular áreas bajo una curva, áreas que generan una curva en revolución y volúmenes de sólidos.

3.1 INTEGRAL DEFINIDA

Se define como el área bajo la curva de una función f(x) en un intervalo entre dos límites [a, b]. Se nota de la forma:

$$\boldsymbol{A = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)\ \ donde\ F\ es\ la\ antiderivada}$$



3.2 INTEGRAL DE UNA CONSTANTE

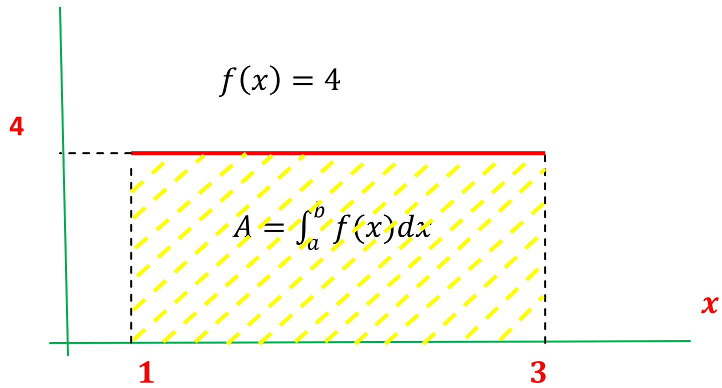
La integral de una función es la antiderivada de la función (Teorema fundamental del Cálculo). Esto quiere decir, que si y = cx, entonces, y'= c, o sea que, la antiderivada de una constante c es cx.

$$f(x) = c, entonces, \int_a^b c dx = cx|_a^b = c(b - a)$$

Ejemplo:

$$\int_1^3 4dx = 4x|_1^3 = 4(3 - 1) = 8$$

Esto lo podemos comprobar, calculando el área bajo la curva f(x)=4, entre el límite inferior igual a 1 y el límite superior igual a 3.



Como se observa el área mostrada es un rectángulo de ancho igual a 2 = 3-1 y de alto igual a 4. Su A = 2x4 = 8

Prueba con Scilab:

```
//definición de la función

function y=f(x)

  y=4

endfunction

//calcular la integral entre x=1 y x=3

intg(1,3,f)

// ans = 8
```

3.3 INTEGRAL DE UNA POTENCIA

Si f(x) = x^n, entonces:

$$f(x) = x^n, \text{entonces}, \int_a^b x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_a^b$$

Esto es se incrementa en uno el exponente y se divide por el exponente elevado.

Prueba:

$$f(x) = y = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \text{entonces}, \quad y' = \frac{(n+1)^{x^n}}{n+1} = x^n$$

Ejemplo:

Hallar la integral de la función y = x^4 entre x=2 y x=5

$$f(x) = y = x^4, \text{entonces}, \int_2^5 x^4 dx = \frac{x^5}{5}\Big|_2^5 = \frac{5^5}{5} - \frac{2^5}{5} = 625 - 6.4 = 618.6$$

Con Scilab:

```
//definción de la función

function y=f(x)

  y=x^4

endfunction

// calculo de la integral

intg(2,5,f)

//ans = 618.6
```

Ejemplo:

Hallar la integral de la función y = $2x^3$ - $3x^2$ + 5x - 3 entre x=1 y x=4

$$\int_1^4 (2x^3 - 3x^2 + 5x - 3)dx = \frac{2x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 3x\Big|_1^4$$

$$= \frac{2(4)^4}{4} - \frac{3(4)^3}{3} + \frac{5(4)^2}{2} - 3(4) - \frac{2(1)^4}{4} - \frac{3(1)^3}{3} + \frac{5(1)^2}{2} - 3(1) = 93$$

Programa Scilab:

```
//definción de la función

function y=f(x)

  y=2*x^3-3*x^2+5*x-3
```

```
endfunction
// cálculo de la integral
intg(1,4,f)
//ans=93
```

4. INTEGRAL INDEFINIDA

La integral indefinida se define como:

$$\int \boldsymbol{f(x)dx = F(x) + C} \ , \quad \boldsymbol{donde\ F\ es\ una\ antiderivada\ de\ f}$$

Ejemplo:

$$\int (2x^5 - 4x^3 + 3x - 5)dx = \frac{2x^6}{6} - \frac{4x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} - 5x + C$$

4.1 FUNCIONES LOGARITMICAS

La integral de una función de la forma f(u)=1/u es igual a:

$$\int \boldsymbol{\frac{1}{u}du} = \int \boldsymbol{\frac{du}{u} = ln|u| + C}$$

Ejemplo:

Hallar la integral:

$$I = \int_1^2 \frac{2x}{4x^2+1}dx$$

$$u = 4x^2 + 1, \qquad du = 8x, entonces, \frac{du}{u} = \frac{8x}{4x^2+1}$$

$$\int_1^2 \frac{2x}{4x^2+1}dx = \frac{1}{4}\int_1^2 \frac{du}{u} = \frac{1}{4}\ln|4x^2+1|\Big|_1^2$$

$$I = \frac{1}{4}[ln|4*2^2+1| - ln|4*1^2+1|] = \frac{1}{4}[ln|17| - ln|5|] = 0.306$$

Cálculo por Scilab:

```
//definir función

function y=f(x)

  y=2*x/(4*x^2+1);

endfunction

//calcular la integral

I=intg(1,2,f)

// I = 0.3059
```

4.2 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Las integrales de las funciones trigonométricas son sus correspondientes antiderivadas.

Ejemplo:

$$\int sen(3x)dx$$

$$u = 3x, entonces, du = 3$$

$$\int sen(3x)dx = \frac{1}{3}\int sen\,u\ \ du$$

Recordando que:

$$D_u(\cos u) = -sen\,u, \quad entonces, D_u(-\cos u) = sen\,u$$

$$\frac{1}{3}\int sen\,u\,du = \frac{1}{3}(-\cos u) = -\frac{1}{3}\cos(3x) + C$$

Ejemplo:

Calcular la integral definida:

$$I = \int_{0.5}^{1.5} \frac{csc^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

Por Scilab:

```
//definir función
function y=f(x)
  y=csc(sqrt(x))^2/sqrt(x);
endfunction
//calcular integral
i=intg(0.5,1.5,f)
// i = 1.619
```

5. APLICACIONES DE LA INTEGRAL

5.1 ÁREA ENTRE DOS CURVAS

El área entre dos curvas f(x) y g(x) acotadas en x=a , y=b, está dada por:

$$\mathrm{A} = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} [\mathrm{f}(\mathrm{x}) - \mathrm{g}(\mathrm{x})]\mathrm{dx}$$

Ejemplo:

Calcular el área de la región limitada por las curvas $f(x)=x^2$ y $g(x)=\sqrt{x}$

Lo primero que se tiene que encontrar son los puntos de corte de las dos gráficas,

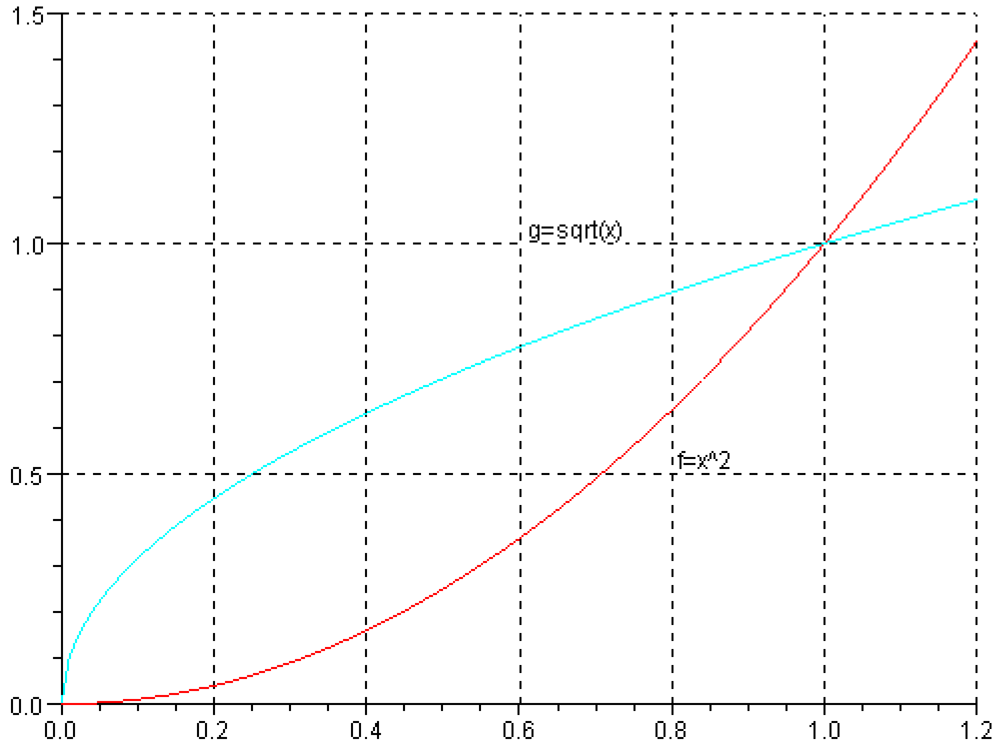
Igualando las ecuaciones: $x^2 = \sqrt{x}$

Elevando al cuadrado: $x^4 = x$, o sea, $x^4 - x = 0$

Factorizando: $x\,(x^3 - 1) = 0$, la solución es : $x = 0$ y $x = 1$

Usando Scilab vamos a graficarlas,

```
//valores de x

x=[0:0.01:1.2];

f=x^2;

g=sqrt(x);

plot2d(x,[f'g'],[5 4])

xset("font size",2)

xstring(0.8,0.5,["f=x^2"])

xstring(0.6,1.0,["g=sqrt(x)"])

xgrid
```



Se observa que las gráficas tienen puntos de intersección en x=0 y x=1

$$A = \int_a^b \left[\sqrt{x} - x^2\right] dx$$

```
//cálculo del área entre las curvas
function y=f(x)
  y=sqrt(x)-x^2;
endfunction
intg(0,1,f)
//ans=0.33
```

5.2 SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

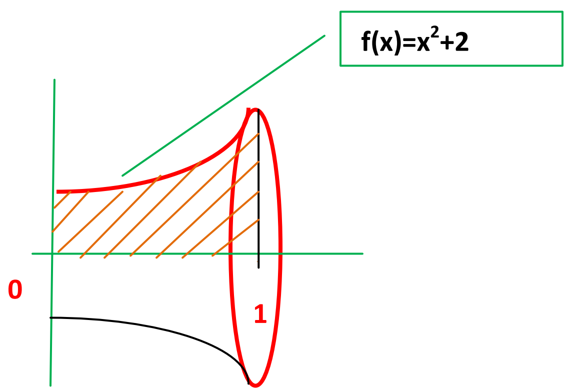
Un sólido de revolución se genera al girar un área alrededor de un de los ejes del plano cartesiano.

Para un área limitada por f(x) y el eje x entre valores de a y b, el volumen es igual a:

$$\mathbf{V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx}$$

Ejemplo:

Hallar el sólido generado al girar el área limitada por la curva $f(x) = x^2 + 2$ entre x=0 y x=1



$$V = \int_0^1 \pi[x^2 + 2]^2 dx = \pi \int_0^1 (\,x^4 + 4x^2 + 4)^2\,dx = \pi \int_0^1 \left(\frac{x^5}{5} + \frac{4x^3}{3} + 4x\right) dx$$

$$V = \pi(\frac{1}{5} + \frac{4}{3} + 4) = 17.38$$

Por Scilab:

//la función es

```
function y=f(x)
  y=%pi*(x^2+2)^2
endfunction
```

//cálculo del área

intg(0,1,f)

//ans = 17.38

5.3 LONGITUD DE ARCO

La longitud de arco de una curva dada por f(x) entre límites a y b, está dada por:

$$\mathbf{L} = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \sqrt{\mathbf{1} + [\mathbf{f}'(\mathbf{x})]^{\mathbf{2}}}\mathbf{dx}$$

Donde f'(x) es la derivada de la función

Ejemplo:

Hallar la longitud del arco de la curva f(x)= $2\sqrt{x}$ – 2 entre x=2 y x=16

Gráfica con Scilab

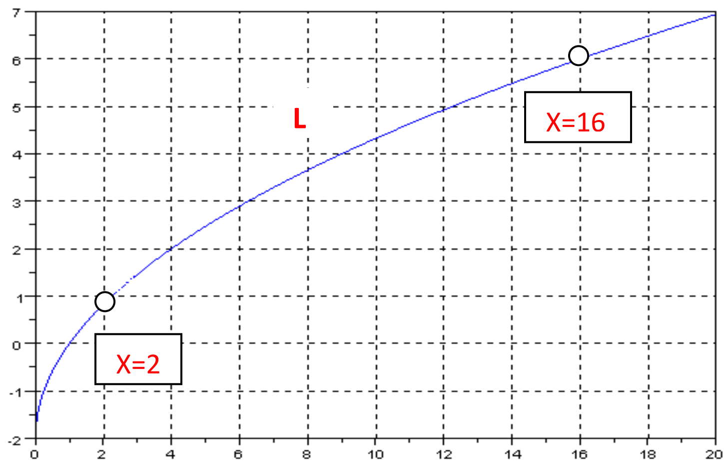
//valores de x

x=[0:0.01:20];

y=2*sqrt(x)-2;

plot(x,y)

xgrid



$Si\ f(x) = 2\sqrt{x} - 2, o\ sea, f(x) = 2x^{1/2} - 2$

$f'(x) = 2\left(\frac{1}{2}\right)x^{-1/2} = x^{-1/2}$

Reemplazando en la fórmula:

$\mathrm{L} = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx = \int_2^{16} \sqrt{1 + [x^{-1/2}]^2}dx = \int_2^{16} \sqrt{1 + x^{-1}}\ dx$ = 14.99

Usando Scilab:

```
//la función derivada es
function y=f(x)
  df=x^(-1/2);
  y=sqrt(1+df^2)
endfunction
//cálculo de la longitud
intg(2,16,f)
//ans=14.99
```

5.4 SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN

La superficie de revolución generada al girar una curva f(x) alrededor del eje x entre los valores x=a y x=b, es igual a:

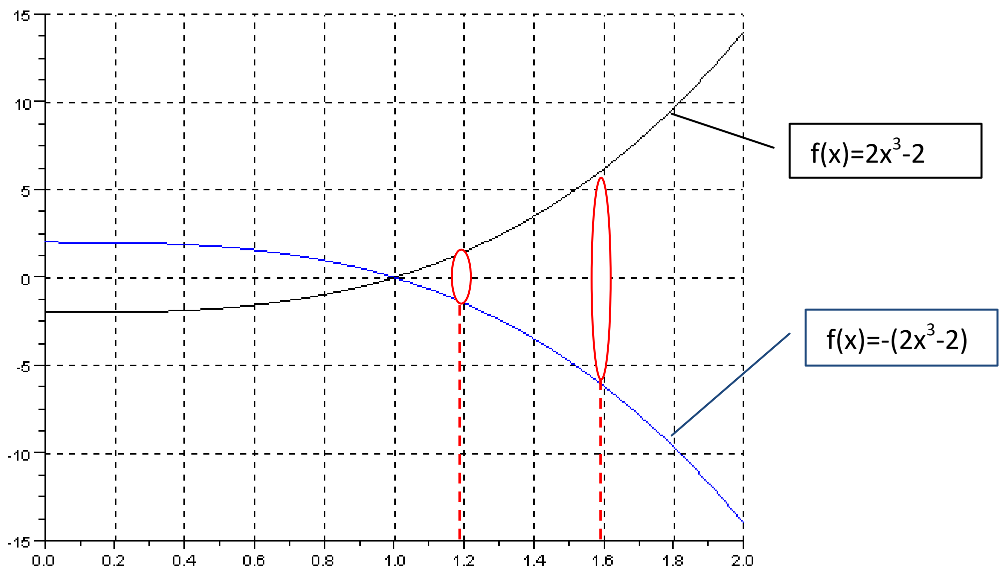
$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$$

Ejemplo:

Hallar el área de la superficie generada al girar $f(x)=2x^3-2$ alrededor del eje x entre x=1.2 y x=1.5

Gráfica con Scilab,

```
//valores de x
x=[0:0.01:2];
y=2*x^3-2;
y1=-(2*x^3-2);
plot2d(x,[y' y1'])
xgrid
```



Si f(x)= $2x^3$- 2, entonces, f'(x)= $6x^2$

$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx = 2\pi \int_{1.2}^{1.5} (2x^3-2)\sqrt{1+[6x^2]^2}\,dx$$

$$S = 2\pi \int_{1.2}^{1.5} (2x^3-2)\sqrt{1+36x^4}dx = 64.47$$

Calculando por Scilab:

```
//la función es
function y=f(x)
  df=6*x^2;
  y=2*%pi*(2*x^3-2)*sqrt(1+df^2)
endfunction
//cálculo del área de revolución
intg(1.2,1.5,f)
//ans=64.47
```