FÍSICA MECÁNICA

PROFESOR: JORGE ANTONIO POLANÍA

CONTENIDO

1. CINEMÁTICA

Física es una ciencia dedicada al estudio de los fenómenos naturales. Su comprensión requiere el uso de las matemáticas y del cálculo que sustenta los conceptos físicos como el de fuerza, energía, la hidráulica, la termodinámica, el electromagnetismo, etc.

Las cantidades físicas fundamentales son la longitud, masa, tiempo, temperatura y carga. Todas las demás cantidades físicas se pueden expresar en función de estas cantidades físicas fundamentales y sus mediciones dependen según el Sistema Internacional de Medidas del metro (m), kilogramo (kg), segundo (sg), grado kelvin (ºk) y del coulomb (coul).

1.1 MOVIMIENTO RECTILÍNEO

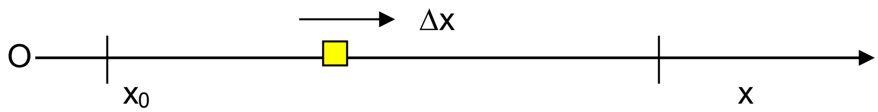
Movimiento rectilíneo de una partícula es aquel cuya trayectoria es una línea recta y su posición cambia al transcurrir el tiempo.

1.1.1 DESPLAZAMIENTO

Al cambio de posición se le denomina desplazamiento y se nota como:

$\Delta x = x - x_0$

donde x_O es la posición final y x_0 es la posición inicial (origen O).



1.1.2 VELOCIDAD

La velocidad media definida entre dos posiciones en los instantes t y t_0 es igual al cambio de desplazamiento con respecto al cambio del tiempo y está definida por :

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0}$$

La velocidad instantánea es la velocidad de la partícula en un instante dado. Para ello se hace el intervalo de tiempo muy pequeño Δt y calcular la velocidad en el límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$, esto es:

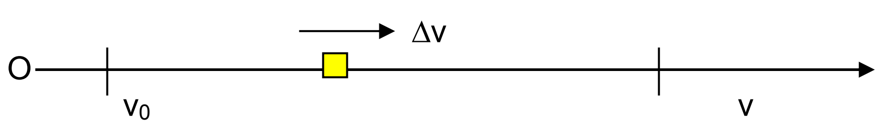
$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

La velocidad es la derivada del desplazamiento.

1.1.3 ACELERACIÓN

La aceleración media definida entre dos instantes t y t_0 es igual al cambio de velocidad con respecto al cambio del tiempo y está definida por :

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0}$$



La aceleración instantánea es la aceleración de la partícula en un instante dado. Para ello se hace el intervalo de tiempo muy pequeño Δt y calcular la aceleración en el límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$, esto es:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

La aceleración es la derivada de la velocidad.

EJEMPLO 1-1:

La posición de una partícula en metros con respecto al tiempo varía según la siguiente ecuación:

$x = t^3 + 5t^2 + 3t + 4$

calcular (a) su velocidad y (b) su aceleración en t =1 sg y en t = 4 sg

Solución:

(a)

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(t^3 + 5t^2 + 3t + 4) = 3t^2 + 10t + 3$$

Para t = 1sg, se tiene que: $v = 3(1)^2 + 10(1) + 3 = 16$ m/sg

Para t = 4sg, se tiene que: $v = 3(4)^2 + 10(4) + 3 = 91$ m/sg

(b)

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(3t^2 + 10t + 3) = 6t + 10$$

Para t = 1sg, se tiene que : $a = 6(1) + 10 = 16$ m/sg^2

Para t = 4sg, se tiene que : $a = 6(4) + 10 = 34$ m/sg^2

EJEMPLO 1-2:

La aceleración de una partícula en m / sg^2 está dada por :

a = 2t - 3

Calcular su (a) velocidad y (b) desplazamiento en el instante t =5 sg si parte del origen con una velocidad inicial de 2 m / sg.

Solución:

(a) velocidad

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \Rightarrow v = \int_{t_0}^{t} a dt = \int_{0}^{t} (2t - 3) dt = t^2 - 3t + 2$$

Para t = 5 sg, se tiene, $v = (5)^2 - 3(5) + 2 = 12$ m / sg

(b) Desplazamiento

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \Rightarrow x = \int_{t_0}^{t} v dt = \int_{0}^{t} (t^2 - 3t + 2) dt = \frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + 2t$$

Para t = 5 sg, se tiene, $x = (5)^3/3 - 3(5)^2/2 + 2 = 41.67 - 37.5 + 2 = 6.17$ m

Observe que: para t = 0, la posición $x_0 = 0$ y

su velocidad $v_0 = (t^2 - 3t + 2)_{t=0} = 2$ m/sg

1.2 MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME

Un movimiento rectilíneo uniforme es aquel que tiene la velocidad constante, o sea , una aceleración igual a cero.

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0} \Rightarrow x - x_0 = v(t - t_0)$$

Si $t_0 = 0$, entonces, $x = x_0 + v\,t$

EJEMPLO 1-3:

Un automóvil va a una velocidad constante de 200 Km / hr . Si se acciona un cronómetro cuando pasa por una posición de 50 Km a qué posición llegará después de 3 horas de recorrido?

Solución:

$x = x_0 + v\,t$ =50 Km + 200 Km/hr (3 hr) = 50 km + 600km = 650 km

Respuesta: Ha llegado a la posición 650 Km pero en 3 horas sólo ha recorrido 650-50 = 600 km

Caso especial: Si la posición inicial es $x_0 = 0$ entonces simplemente,

$$x = v\,t$$

1.3 MOVIMIENTO UNIFORME ACELERADO

Un movimiento uniformemente acelerado es aquel que tiene su aceleración constante. Partiendo de la ecuación vista anteriormente,

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0} \Rightarrow v - v_0 = a(t - t_0)$$

Por tanto, si $t_0 = 0$, entonces:

$$v = v_0 + at,\ conociendo\ que\ \ x - x_0 = \int_0^t v\,dt = \int_0^t (v_0 + at)dt = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Si la posición inicial es cero entonces,

$$\boxed{\begin{array}{l} x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ v = v_0 + at \end{array}}$$

De las dos ecuaciones anteriores, podemos sacar una tercera que relacione velocidad, aceleración y espacio:

$v = v_0 + at$, despejando $t = (v - v_0)/a$, reemplazando,

$x = v_0\ [v - v_0)/a] + ½\ a[v - v_0)/a]^2$

$x = [v_0 v - v_0^2]/a + ½\ [v^2 - 2v\,v_0 + v_0^2]/a$

$2ax = v^2 - v_0^2 \Rightarrow$ $v^2 = v_0^2 + 2ax$

EJEMPLO 1-4:

Un móvil pasa por un punto a una velocidad de 80 k/hr. Si va con una aceleración constante de 20 km/hr ¿Cuánto recorrerá al cabo de 4 hr?

Solución:

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = (80\text{km/hr})(4\text{hr}) + \frac{1}{2}(20\text{km/hr}^2)(4\text{hr})^2$$
$$= 320\text{km} + 160\text{km} = 480\text{km}$$

EJEMPLO 1-5:

Un motociclista parte del reposo y recorre una distancia de 300 km a una aceleración constante de 100 km/hr^2 . ¿Cuál fue su velocidad de llegada?

Solución:

Como parte del reposo, entonces $v_0 = 0$, además, $x = 300$ km, $a = 100$ km/hr^2

Velocidad final = $v = v_0 + a\,t$, no se conoce el tiempo t, entonces se usa la fórmula:

$x = v_0\,t + ½\,a\,t^2 = 0 + ½\,(100 \text{ km/hr}^2)(t^2)$, entonces, $300 \text{ km} = 50 \text{ km/hr}^2(t^2)$

despejando se tiene, $t^2 = 300 / 50 = 6 \text{ hr}^2$, luego $t = \sqrt{6} = 2.45$ hr

ya conocido el tiempo, $v = 0 + a\,t = (100 \text{ km/hr}^2)(2.45 \text{ hr}) = 245 \text{ km / hr}$

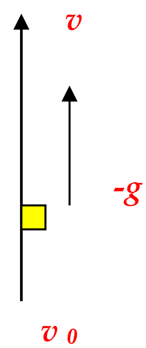
Otra forma: $v^2 = v_0{}^2 + 2ax \Rightarrow v^2 = 0^2 + 2(100 \text{ km/hr}^2)(300 \text{ km})$

$v^2 = 60000 \text{ km}^2/\text{hr}^2 \Rightarrow v = 245 \text{ km/hr}$

<u>Respuesta</u>: La velocidad de llegada es de 245 km/hr

1.4 MOVIMIENTO DE CAÍDA LIBRE

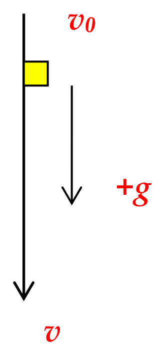
Si no se tiene en cuenta la fricción del aire todos los cuerpos caen dirigidos hacia el centro de la tierra con movimiento uniformemente acelerado con una aceleración cuyo valor es igual a la gravedad, esto es, $g = 9.8\ m/sg^2$. Lo contrario, hacia arriba los cuerpos se desaceleran hasta llegar a al posición de reposo con una aceleración igual a $g = -9.8\ m/sg^2$. Si consideramos hacia arriba el movimiento denotado con la variable y , se tiene que las ecuaciones son las siguientes:



Movimiento desacelerado

$y = v_0\, t - ½\, g\, t^2$

$v = v_0 - g\, t$



Movimiento acelerado

$y = v_0\, t + ½\, g\, t^2$

$v = v_0 + g\, t$

EJEMPLO 1-6 :

Se deja caer un objeto desde un edificio de 500 m de altura. Calcular (a) la velocidad y (b) el tiempo que tarda en llegar al suelo.

Solución:

Variables conocidas: $y = 500$ m, $v_0 = 0$, $g = 9.8\ m/sg^2$

(a) El movimiento es de caída libre, entonces es un movimiento acelerado:

$y = v_0\, t + ½\, g\, t^2 = 0 + ½\,(9.8\ m/sg^2)\ t^2 = 300$ m,

despejando : $t^2 = (300\ m)(2)/(9.8\ m/sg^2) = 61.22\ sg^2$, $t = 7.82$ sg

Respuesta: El tiempo que tarda en llegar al suelo es de 7.82 sg

(b) Conocido el tiempo se puede hallar la velocidad final:

$v = v_0 + g\,t$, $v = 0 + (9.8)(7.82) = 76.64$ m/sg

Respuesta: La velocidad con que llega al suelo es de 76.64 m/sg

EJEMPLO 1-7:

Se lanza un objeto hacia arriba con una velocidad de 50 m/sg . Calcular la máxima altura que alcanza y el tiempo que gasta.

Solución:

Variables conocidas: $v_0 = 50$ m/sg, $v = 0$ (velocidad final)

El movimiento es desacelerado (hacia arriba), entonces:

$v = v_0 - g\,t$, $0 = 50 - (9.8)t$, por tanto, $t = 50/9.8 = 5.1$ sg

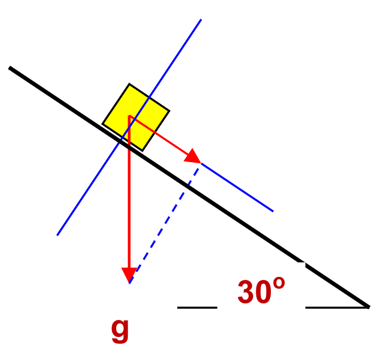
$y = v_0\,t - ½\,gt^2 = (50)(5.1) - ½\,(9.8)(5.1)^2 = 255 – 4.9(26.01) = 127.55$ m

Respuesta : La altura que alcanza es de 127.55 m y gasta un tiempo de 5.1 sg

1.5 MOVIMIENTO EN PLANO INCLINADO

El movimiento de un cuerpo en un plano inclinado es un movimiento uniforme acelerado cuya aceleración depende de la aceleración de la gravedad y del ángulo de inclinación del plano. Si se tiene un plano inclinado de 30º como el de la figura:

La aceleración del bloque es:



$a = g \text{ sen } 30º$

En general:

$a = g \text{ sen } \alpha$

donde α es el ángulo de inclinación del plano.

Las ecuaciones que rigen el movimiento de un cuerpo en un plano inclinado son entonces:

(a) Hacia arriba.

$e = v_0 t - ½ (g \text{ sen } \alpha) t^2$

$v = v_0 – (g \text{ sen } \alpha) t$

(b) Hacia abajo

$e = v_0 t + ½(g \text{ sen } \alpha) t^2$

$v = v_0 +(g \text{ sen } \alpha) t$

EJEMPLO 1-8:

Sobre un nevado de pendiente de 60º (plano inclinado de 60º) un alpinista se suelta del reposo. Calcular la velocidad de llegada y el tiempo que tarda en recorrer 500 m.

Solución:

$e = v_0 t + ½(g \text{ sen } \alpha) t^2$, $500 = 0 + ½(9.8 \text{ sen } 60) t^2$

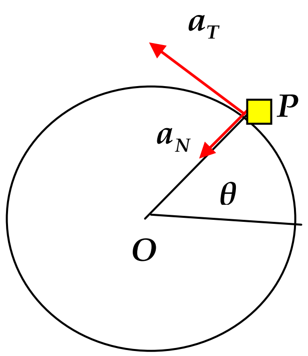
$500 = 4.9(0.866)t^2$, $500 = 4.24t^2$

$t^2 = 500 / 4.24 = 111.92$ sg , <u>t = 10.85 m/sg</u>

$v = v_0 +(g \text{ sen } \alpha) t = 0 +(9.8\text{sen}60) t = 0 + 9.8(0.866)(10.85) = 92.1$ m/sg

1.6 MOVIMIENTO CIRCULAR

Movimiento circular uniforme es aquel cuya trayectoria es una circunferencia y la magnitud de la aceleración es constante.



θ = desplazamiento angular

ω = velocidad angular

α = aceleración angular

Las ecuaciones que relacionan posición, velocidad y aceleración angular son :

$$\varpi = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta - \theta_0}{t - t_0} \qquad\qquad a = \frac{\Delta\varpi}{\Delta t} = \frac{\varpi - \varpi_0}{t - t_0}$$

Si α = constante y $t_0 = 0$, $\theta_0 = 0$, entonces:

$\omega = \omega_0 + \alpha\, t$, $\theta = \omega_0\, t + ½\, \alpha\, t^2$

Si $\alpha = 0$, o sea que la velocidad angular es constante, entonces : $\alpha = 0$

$\theta = \omega\, t$

EJEMPLO 1-9:

Una rueda gira a 8 rpm (revoluciones por minuto). Si la velocidad angular es constante, calcular su posición angular después de 5 segundos.

<u>Solución:</u>

ω = 8 rpm = 8 rev / min = (8 rev/min) (1 min/60 sg)

= 0.13 rev /sg = 0.13 (360º/rev) = 46.8º/sg

θ = ω t = (46.8º/sg)(5 sg) = 234º = 234º

como 180º es igual a π radianes (= 3.14),

ω = (46.8º/sg)(3.14/180) = 0.82 rad/sg

θ = 234º(3.14/180º) = 4.1 rad

Respuesta: ω = 0.82 rad/sg , θ = 4.1 rad

EJEMPLO 1-10:

La aceleración de una partícula con movimiento uniformemente acelerado es de 25 rad/sg^2, calcular su posición si parte del reposo en θ =0 y su velocidad después de 1 minuto.

Solución:

Variables conocidas : ω_0 = 0, α = 25 rad/sg^2, t = 60 sg

$\omega = \omega_0 + \alpha\, t$ = 0 +(25 rad/sg^2)(60 sg) = 1500 rad/sg

$\theta = \omega_0 t + ½ \alpha t^2$ = 0 +½(25 rad/sg^2)(60sg)^2 = 12.5(3600) = 45000 rad

Respuesta: θ = 45000 rad, ω = 1500 rad/sg

1.7 ACELERACIÓN TANGENCIAL Y NORMAL

En un movimiento circular la aceleración tiene dos componentes: una debido al cambio de dirección de la velocidad llamada aceleración normal y su vector está dirigido al centro de la circunferencia y otra al cambio de magnitud de la velocidad llamada aceleración tangencial y su vector es tangente a la trayectoria circular.

$$a_T = \frac{|\Delta v|}{\Delta t} = r\frac{|\Delta \varpi|}{\Delta t} = ra \qquad a_N = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{r} = \frac{(\varpi \cdot r)^2}{r} = \varpi^2 r$$

a_T : aceleración tangencial, a_N : aceleración normal

EJEMPLO 1-11:

Una cuerpo gira circularmente con radio = 20 cm a una aceleración angular de 50 rad/sg^2. Para t = 10 sg calcular su aceleración tangencial y normal si partió del reposo.

Solución:

$$a_T = ra = (0.20\, m)(50 rad/sg^2) = 10 m/sg^2$$

$\omega = \omega_0 + \alpha\, t = 0 + (50 \text{ rd/sg}^2)(10 \text{ sg}) = 500 \text{ rad/sg}$

$$a_N = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{r} = \frac{(\varpi \cdot r)^2}{r} = \varpi^2 r = (500 rad/sg)^2 (0.20m) = 50000\, m/sg^2$$

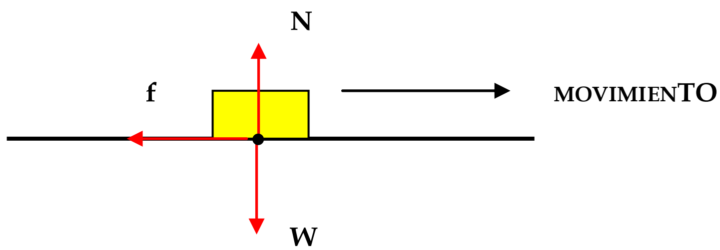
Respuesta : La aceleración tangencial es de 1.05 m/sg^2 y la aceleración normal es de 5.47 m/sg^2

2. DINÁMICA

2.1 CONCEPTOS BÁSICOS

2.1.1 ROZAMIENTO

La fuerza de rozamiento que se produce entre dos superficies a) se opone al movimiento b) es proporcional a la fuerza normal (perpendicular) que ejerce el plano sobre el bloque y c) no depende del área de contacto sino del tipo de superficie.



f : Fuerza de rozamiento

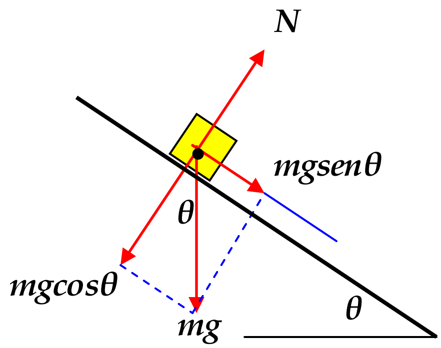
W : Peso = mg

N : Fuerza normal   N = W = m g

m = Masa del cuerpo

2.1.2 FUERZA NORMAL

Para el caso anterior en el cual el plano es horizontal, la fuerza normal que es aquella que ejerce el plano sobre el bloque era igual al peso del cuerpo. En el caso de un plano inclinado es diferente.



Como se observa en la figura la fuerza normal o simplemente normal es ahora igual a :

$N = m\, g\, \cos\theta$

2.1.3 FUERZA DE ROZAMIENTO

Al aplicar una fuerza a un cuerpo ante de ponerse en movimiento existe una fuerza que se opone a el y es la fuerza de rozamiento estático. Cuando se pone en movimiento sigue existiendo el rozamiento pero ahora se llama rozamiento cinético.

μ_k : coeficiente de rozamiento cinético

μ_e : coeficiente de rozamiento estático

f_k : fuerza de rozamiento cinético

f_e : fuerza de rozamiento estático

Los coeficiente de rozamiento dependen del tipo de material de las superficies en contacto y su fuerza de rozamiento es igual a su coeficiente multiplicado por la fuerza normal.

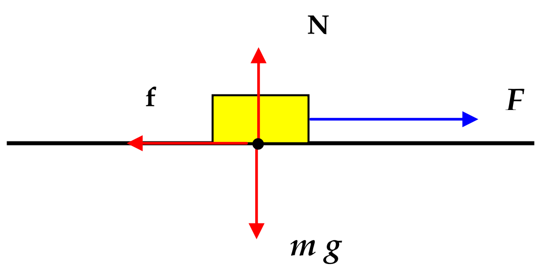
$$f = \mu\, N = \mu\, m\, g \quad \text{(Plano horizontal)}$$

$$f = \mu\, N = \mu\, m\, g \cos\theta \quad \text{(Plano inclinado)}$$

TABLA DE COEFICIENTES DINÁMICOS

SUPERFICIES EN CONTACTO	μ_k
Caucho sobre concreto	0.8
Correa (cuero) sobre metal	0.6
Neumático sobre terreno firme	0.5
Madera sobre madera	0.2
Acero sobre acero	0.18
Acero sobre hielo	0.02

2.2 DINÁMICA EN UN PLANO HORIZONTAL



Primera Ley de Newton: La primera ley o Ley de la Inercia dice que un cuerpo libre está en reposo o con velocidad constante ($a = 0$) si no hay fuerzas aplicadas sobre él.

Segunda Ley de Newton: La fuerza resultante de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo es igual al producto de la masa del cuerpo por su aceleración.

$$\sum F = m\,a$$

Tercera Ley de Newton: A toda fuerza aplicada acción le corresponde una reacción. Para el caso del bloque horizontal, la acción puede ser el peso que es la fuerza aplicada por el bloque a la superficie y la reacción es la fuerza aplicada por la superficie al bloque, o sea la normal.

Aplicando esta leyes al sistema de la figura:

$N = m\,g$ (tercera ley)

$F - f = m\,a \;\Rightarrow F - \mu\,N = m\,a \;\Rightarrow\; F - \mu\,m\,g = m\,a$

Donde F es la fuerza externa aplicada y m es la masa del bloque.

Unidades. La unidad de la masa es el kilogramo en el sistema internacional de medidas. Un kilogramo es igual a 1000gramos

$$[m] = 1\ Kg = 1000\ gr$$

La unidad de fuerza es el newton en honor a este científico definido por el sistema internacional de medidas.

$$[F] = 1\ Nt = 1\ kg\ m / sg^2$$

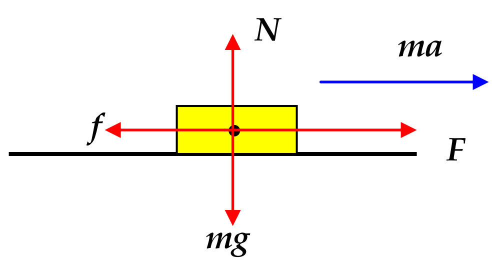
EJEMPLO 2-1:

Un bloque de madera de 3 Kg está sobre una mesa de madera. Si al bloque se le aplica una fuerza de 10 Nt encontrar la aceleración del bloque. El coeficiente de rozamiento es de 0.2

Solución:

Datos conocidos: $m = 3$ kg, $F = 10$ Nt , $\mu_k = 0.2$

Diagrama de cuerpo libre :



Ecuaciones dinámicas:

$\sum F = F - f = m\,a$, $\Rightarrow F - \mu_k N = m\,a$, $N = mg$

$F - \mu_k m\,g = m\,a$, reemplazando tenemos:

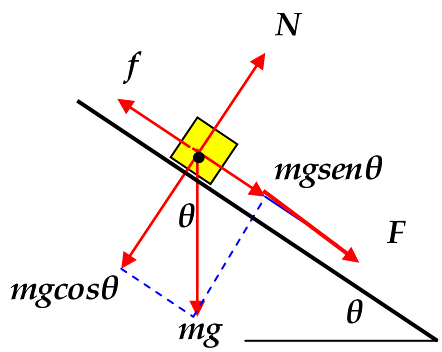
$10\ Nt - 0.2(3\ kg)(9.8\ m/sg^2) = (3\ kg)\,a$,

$10\ kg\ m/sg^2 - 5.88\ kg\ m/sg^2 = (3\ kg)\ a$, eliminando kg,

$4.12\ m/sg^2 = 3\ a$, entonces, $a = (4.12/3)\ m/sg^2 = 1.37\ m/sg^2$

Respuesta: La aceleración que obtiene el bloque es de $1.37\ m/sg^2$

2.3 DINÁMICA EN UN PLANO INCLINADO



F es la fuerza externa aplicada al bloque

f es la fuerza de rozamiento entre las superficies en contacto

θ es el ángulo del plano inclinado

Suponga que el eje de las x's es paralelo al plano inclinado hacia abajo y el eje de las y's es perpendicular al plano, esto es, en dirección de la fuerza normal N. Las ecuaciones dinámicas quedan de la siguiente manera:

Para el eje x,

$\sum F_x = F + m\ g\ sen\theta - f = m\ a_x$ (1)

Para el eje y,

$\sum F_y = N - m\ g\ cos\theta = m\ a_y$ (2)

Como es obvio el bloque solamente se mueve en la dirección de eje x, por tanto,

$$a_x = a, \quad a_y = 0$$

Tomando la ecuación (1) y conociendo que $f = \mu N$ y $N = m\,g\cos\theta$:

$F + m\,g\,\text{sen}\theta - \mu N = m\,a$, (3)

De la ecuación (2) :

$N - m\,g\cos\theta = 0$, $\rightarrow$ $N = m\,g\cos\theta$

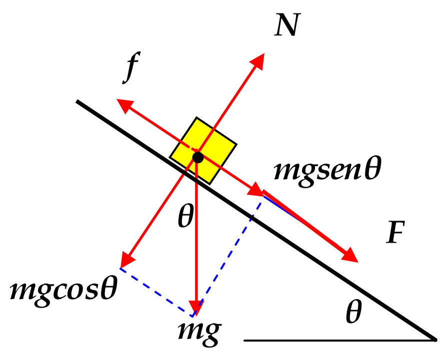
Reemplazando en (3) :

$F + m\,g\,\text{sen}\theta - \mu\,m\,g\cos\theta = m\,a$

EJEMPLO 2-2:

Un bloque de madera de 2 kg desliza sobre un plano inclinado de 45º también de madera con μ = 0.2. Sin aplicar fuerza externa al bloque encontrar la velocidad del bloque cuando ha recorrido 50 cm partiendo del reposo.

Diagrama de cuerpo libre:



Solución:

Valores conocidos: $F = 0$, $m = 2$ kg, $\theta = 45º$, $\mu = 0.2$, $v_0 = 0$

Ecuaciones dinámicas:

$F + m\,g\,\text{sen}\theta - f = m\,a \Rightarrow 0 + (2\text{ kg})(9.8\text{ m/sg}^2)\text{sen } 45º - f = (2\text{ kg})\,a$, (1)

Paso a: Encontrar la fuerza de fricción

Conociendo que, $f = \mu N = \mu\,(m\,g\cos\theta) = 0.2(2\text{ kg})(9.8\text{ m/sg}^2)\cos 45º = 2.77$ Nt

La fuerza de fricción es igual a <u>f = 2.77 Nt</u>

Paso b: Encontrar la aceleración

Reemplazando este valor en (1) :

0 +(2 kg)(9.8 m/sg^2)sen 45º -2.77 kg m/sg^2 = (2 kg) a

11.09 m/sg^2 = 2a $\Rightarrow$ <u>a =5.55 m/sg^2</u>

La aceleración que adquiere el bloque es de a = 5.55 m/sg^2

Paso c: Encontrar la velocidad $v_0 = 0$, x = 50 cm = 0.5 m

$v^2 = v_0^2 + 2\,a\,x \Rightarrow v^2 = 0 + 2(5.55\ m/sg^2)(0.5\ m) = 5.55\ m^2/sg^2$,

sacando raíz cuadrada : <u>v = 2.36 m/sg</u>

Respuesta: La velocidad de llegada del bloque después de recorrer 50 cm es de 2.36 m/sg

2.4 DINÁMICA DEL MOVIMIENTO CIRCULAR

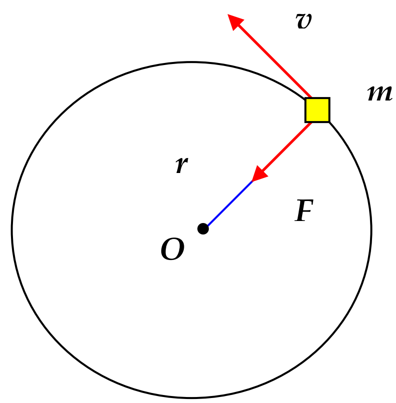
Ya se conoce que cuando un cuerpo gira en moviendo circular con velocidad constante, se presenta una aceleración dirigida hacia el centro cuya magnitud es igual a :

$$\boxed{a_N = \frac{v^2}{r} = \varpi^2 r}$$

Esto quiere decir que se presenta una fuerza dirigida al centro que la llamaremos fuerza centrípeta cuyo valor es igual a :

$$\boxed{F = m\,a_N = m\frac{v^2}{r} = m\varpi^2 r}$$

La reacción a la fuerza centrípeta se llama fuerza centrífuga.



EJEMPLO 2-3:

Un objeto 100 gramos está atado a una cuerda y gira en movimiento circular a una velocidad constante de 50 rpm . Si la cuerda tiene una longitud de 80 cm determine la velocidad tangencial con que gira el objeto y la tensión de la cuerda.

Solución:

La tensión que nos pide es la fuerza con que la masa tensiona la cuerda, está dirigida hacia fuera y corresponde a la fuerza centrífuga.

Se conoce: ω = 50 rpm, m = 100 gr = 0.1 kg, r = 80 cm = 0.80 m

ω = 50 rpm = 50 rev/min = 50 (6.28 rad/rev)(1 min/60 sg) = 5.23 rad/sg

v = ω r = (5.23 rad/sg)(0.80 m) , <u>v = 4.18 m/sg</u>

Conocida la velocidad, se calculará la fuerza centrífuga:

$F_c = m\, v^2 / r = (0.1\ \text{kg})(4.18\ \text{m/sg})^2 / (0.80\ \text{m})$, $\underline{F_c = 2.18\ \text{Nt}}$

<u>Respuesta</u> : La velocidad conque gira el objeto es de 4.18 m/sg y la tensión en la cuerda es de 2.18 newton.

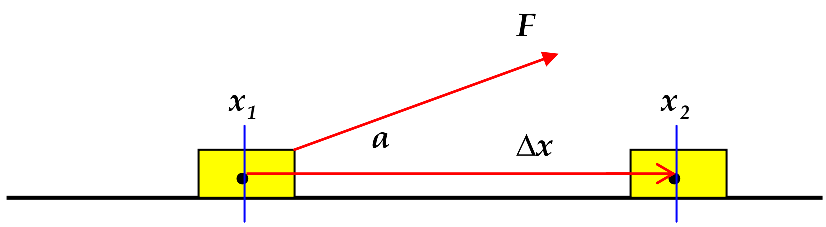
3. TRABAJO Y ENERGÍA

3.1 TRABAJO

3.1.1 TRABAJO DE UNA FUERZA

El trabajo se define como el producto punto entre la fuerza aplicada y el desplazamiento de la partícula. El trabajo es una cantidad escalar no un vector como la velocidad, fuerza, etc.

$$\boxed{U = \vec{F} \bullet \Delta\vec{x} = F\,\Delta x \cos a}$$



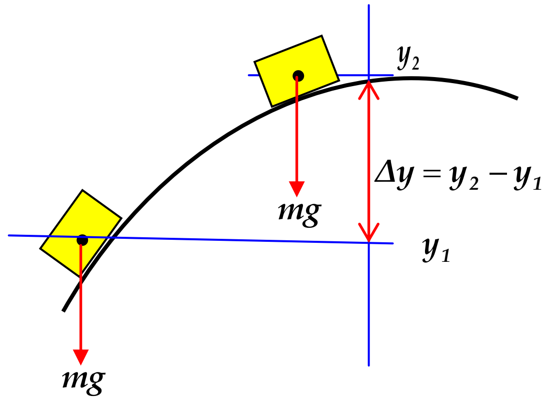
Caso especial: Nótese que si la fuerza aplicada está en dirección al movimiento (α = 0º, cos 0º = 1), entonces, la ecuación se reduce a :

$$\boxed{U = F\,\Delta x}$$

La unidad de medida del trabajo es el Joule si la fuerza se da en Newton y el desplazamiento en metros.

3.1.2 TRABAJO DE UN PESO

El trabajo de un peso se obtiene sustituyendo F por mg y Δx por Δy (desplazamiento vertical).



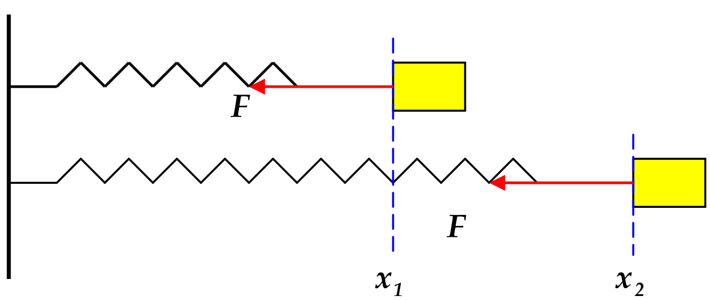
El trabajo que se realiza para subir el bloque tiene signo negativo puesto que la dirección del desplazamiento y de la fuerza (peso) tienen sentido contrario.

$$\boxed{U = - m\, g\Delta y = - m\, g(y_2 - y_1)}$$

3.1.3 TRABAJO DE UN RESORTE

Cuando se aplica una fuerza a un resorte para estirarlo un Δx se produce una reacción dentro de él de una fuerza igual y de sentido contrario que hace que el trabajo realizado por el resorte sea negativo. Esta fuerza es igual a :

$F = - k\, x$, donde k es la constante de elasticidad del resorte.



Para un pequeño desplazamiento, el trabajo es igual a:

$$U = \int_{x1}^{x2} F dx = -\int_{x1}^{x2} (kx) dx = -\frac{1}{2} k x_2^{\,2} + \frac{1}{2} k x_1^{\,2}$$

3.2 ENERGÍA

3.2.1 ENERGÍA CINÉTICA

Se sabe que el trabajo realizado por una fuerza es igual a :

$$U = \int_{x1}^{x2} F dx \quad pero \ \ F = m\,a = m\frac{dv}{dt}$$

Multiplicando por dx / dx, se tiene.

$$F = m\,a = m\frac{dv}{dt}\cdot\frac{dx}{dx} = m\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = m\frac{dv}{dx}\cdot v$$

Entonces:

$$U = \int_{x1}^{x2} F dx = \int_{x1}^{x2}(m\frac{dv}{dx}v)dx = \int_{v1}^{v2} mv dv = \frac{1}{2}mv_2^{\,2} - \frac{1}{2}mv_1^{\,2}$$

A la expresión ½ m v^2 se le conoce con el nombre de Energía Cinética y es directamente proporcional a la masa y al cuadrado de su velocidad. Se simboliza con K.

$$K = ½\, m\, v^2$$

Se puede concluir que el trabajo realizado por una fuerza es igual al cambio de energía cinética que es el enunciado del Principio de Trabajo y Energía. Esto es,

$$K_{21} = ½\, m\, v_2^{\,2} - ½\, m\, v_1^{\,2}$$

La unidad de medida de la energía es la misma unidad de la del trabajo, o sea, el joule.

3.2.2 ENERGÍA POTENCIAL

La energía de un cuerpo que depende de la posición se denomina Energía Potencial. Se nota con la letra V. El trabajo realizado por la gravedad es igual al cambio de energía potencial.

(a) Para el caso de un cuerpo cuya fuerza que produce el movimiento es la gravedad:

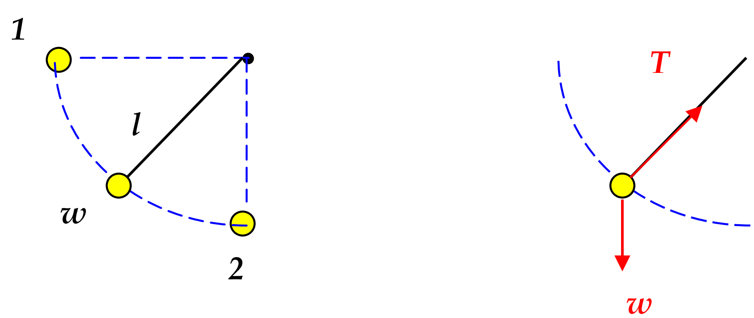
$$V_{21} = mgy_1 - mgy_2$$

(b) Para el caso de un resorte:

$$V_{21} = \tfrac{1}{2}\, k\, x_2^{\,2} - \tfrac{1}{2}\, k\, x_1^{\,2}$$

3.2.3 EL PÉNDULO SIMPLE

Está Formado por una cuerda de longitud l en cuyo extremo se coloca un cuerpo de peso w. El peso se deja en libertad desde la posición horizontal inicial oscilando en un plano vertical.



Aplicación del principio del trabajo y de la energía:

$$U = \Delta V = \Delta K \quad \text{o sea,} \quad mgy_1 - mgy_2 = \tfrac{1}{2}\, m\, v_2^{\,2} - \tfrac{1}{2}\, m\, v_1^{\,2}$$

$$\text{Nótese que :} \quad mgy_1 + \tfrac{1}{2}\, m\, v_1^{\,2} = mgy_2 + \tfrac{1}{2}\, m\, v_2^{\,2}$$

La energía total en cualquier punto se conserva. Este es el principio de conservación de la energía.

Para el punto 2 : $y_2 = 0$, $v_2 = v$

Para el punto 1 : $y_1 = l$, $v_1 = 0$ (posición inicial en reposo)

Reemplazando estos valores, se tiene : $m\, g\, l = \frac{1}{2} m\, v^2 \Rightarrow$

$$\boxed{v = \sqrt{2gl}}$$

Esto quiere decir que la energía potencial de la partícula en el punto 1 se convierte en energía cinética en el punto 2.

3.3 POTENCIA Y EFICIENCIA

3.3.1 POTENCIA

Potencia es la rapidez como se hace trabajo. Esto quiere decir que una máquina que realiza un trabajo en una pequeña cantidad de tiempo tiene una gran potencia. Por ejemplo, un motor de 4 hp realiza el mismo trabajo que uno de 2 hp pero en la mitad del tiempo o en el mismo tiempo hace el doble del trabajo.

$$Potencia = \frac{trabajo}{tiempo} \Rightarrow Pmedia = \frac{\Delta U}{\Delta t}, P = \frac{dU}{dt} = \frac{Fdx}{dt} = Fv$$

Potencia = Fuerza*velocidad

La unidad de medida en el sistema internacional es el vatio en potencia eléctrica y el caballo fuerza horse power – hp en potencia mecánica.

1 hp = 746 w

3.3.2 EFICIENCIA

Debido al rozamiento interno que tiene una máquina la potencia de salida es menor que la potencia de entrada. La razón entre estas dos potencias se denomina eficiencia y se nota con la letra griega η.

$$\eta = \frac{potencia\_de\_salida}{potencia\_de\_entrada}$$

EJEMPLO 3-1:

Un automóvil de 2000 kg se mueve hacia abajo sobre una pendiente de 10º a una velocidad de 80 km/hr. De repente el vehículo frena y se detiene en 150 m. Calcular el coeficiente de rozamiento entre las llantas y el pavimento.

Solución:

Principio del Trabajo y la energía: El trabajo realizado por la fuerza es igual al cambio de energía cinética del auto. Entonces,

$U_{21} = F\ \Delta x = ½\ m\ v_2^{\ 2}$, debido a que la velocidad final ($v_1 = 0$) es cero,

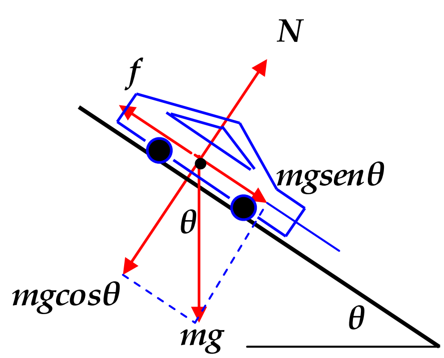
entonces,

$v_2 =$ 80 km/hr = 80 km/hr (1000 m/km) (1 hr/3600 sg) = 22.22 m/sg

F (150m) =½ (2000 kg) (22.22 m/sg)^2 = 493728.4 kg.m^2/sg^2

despejando:

F = (493728.4 kg.m^2/sg^2) / (150 m) = 3291.52 kg m/sg^2 = 3291.52 Nt



Del diagrama de cuerpo libre se tiene que:

F = mgsen10º - f = wsen10º - μ wcos10º = 3291.52 Nt (1)

Se sabe que el peso de un cuerpo es igual a w = m g

w =2000 kg (9.8 m/sg^2) = 19600 Nt

reemplazando en (1)

F = 3291.52 = 19600 (0.1736) – μ (19600)(0.9848),

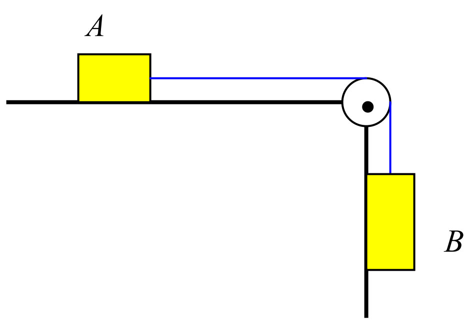
3291.52 = 3403.50 – 19302.23 μ ⇒ μ =(3403.50 – 3291.52)/ 19302.23

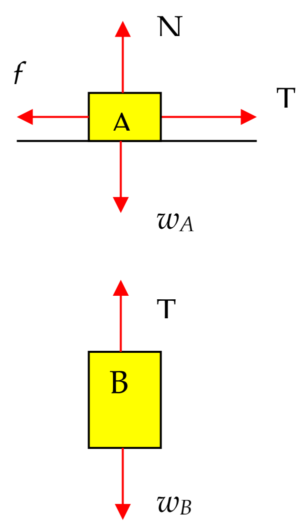
μ =0.0058

<u>Respuesta:</u> El coeficiente de rozamiento es igual a 0.058

EJEMPLO 3-2:

Dos bloques están unidos por una cuerda. Si el sistema parte del reposo, determinar la velocidad del bloque A después de que se ha desplazado 1.4 m. El bloque A es de 1 kg, el bloque B de 1.4 kg y el coeficiente de rozamiento entre el bloque A y el plano es de 0.3





T : Tensión de la cuerda

w_A : Peso del bloque A

w_B : Peso del bloque B

Solución:

(a) Para el bloque A: $(N = w_A)$

Aplicando el principio del trabajo y la energía,

$U = (T - f)\Delta x = (T - \mu N)\ \Delta x = (T - \mu w_A)\ \Delta x$, reemplazando,

$U = (T - 0.3\ m_A\ g)(1.4\ m) = (T - 1\ kg.\ 9.8\ m/sg^2)(1.4\ m)$

$U = 1.4\ T - 13.72 = ½\ m_A\ v^2 = ½\ (1\ kg)\ v^2$

$U = 1.4T - 13.72 = 0.5\ v^2$ (1)

(b) Para el bloque B:

Note que para el bloque A, $N = w_A$ porque el bloque no se mueve en forma vertical, pero par el bloque B, $T \neq w_B$ porque en esa dirección hay movimiento acelerado debido a la gravedad.

Aplicando el principio de trabajo y energía :

$U = F\Delta y = (\ w_B - T)\ \Delta y = (\ m_B\ g - T)(1.4\ m) = (\ 1.4\ kg.\ 9.8\ m/sg^2 - T\ )(1.4\ m)$

$U = 19.21 - 1.4\ T = ½\ m_B\ v^2 = ½\ (1.4\ kg)\ v^2$

$U = 19.21 - 1.4\ T = 0.7\ v^2$ (2)

Despejando de (2): $1.4\ T = 19.21 - 0.7\ v^2 \Rightarrow T = 13.72 - 0.5\ v^2$

Reemplazando este valor en (1) :

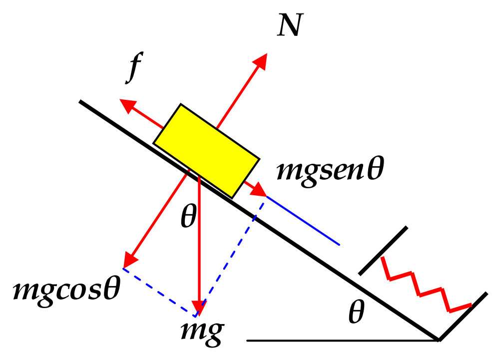
$1.4(13.72 - 0.5\ v^2\ ) - 13.72 = 0.5\ v^2$, esto es, $19.21 - 0.7\ v^2 - 13.72 = 0.5\ v^2$

$1.2\ v^2 = 5.49 \rightarrow v^2 = 4.575 \rightarrow v = 2.14\ m/sg$

Respuesta: La velocidad de los bloques después de recorrer 1.4 m es de 2.14 m/seg

EJEMPLO 3-3:

Un bloque de 10 kg se suelta hacia abajo sobre un plano inclinado 30º (μ = 0.3) en donde lo espera un resorte con constante elástica de 200 Nt/m. Calcular la velocidad con que llega al resorte después de recorrer 80 cm y la compresión máxima del resorte.



Solución:

(a) El trabajo realizado por la fuerza superficial del plano (m g senθ – f) es igual al cambio de energía cinética del bloque. Entonces,

$(m\ g\ sen\theta - f)\Delta x = \frac{1}{2}\ m\ v^2 \Rightarrow (m\ g\ sen\theta - \mu N)\Delta x = \frac{1}{2}\ m\ v^2$

$(m\ g\ sen\theta - \mu mg\ cos\theta)\Delta x = \frac{1}{2}\ m\ v^2 \Rightarrow$

Datos conocidos : m = 10 kg, μ = 0.3, θ = 30º, Δx = 80 cm = 0.8 m

Como todos los datos están en el sistema internacional, entonces,

$[(10)(9.8)sen30º - 0.3(10)(9.8)cos30º]\ (0.8) = \frac{1}{2}\ (10)\ v^2$

$(49 - 25.46)(0.8) = 5\ v^2 \rightarrow v^2 = 3.77 \rightarrow \underline{v = 1.94\ m/sg}$

(b) El cambio de energía del bloque es igual al trabajo realizado por la fuerza superficial del plano.

$(m\ g\ sen\theta - f\ )\Delta x = \frac{1}{2}\ k\ \Delta x^2 - \frac{1}{2}\ m\ v^2 \Rightarrow$

$(m\ g\ sen\theta - \mu\ m\ g\ cos\theta\ )\Delta x = \frac{1}{2}\ k\ \Delta x^2 - \frac{1}{2}\ m\ v^2$

$[(10)(9.8)\ sen30 - 0.3(10)(9.8)\ cos30\ ]\Delta x = \frac{1}{2}\ (400)\ \Delta x^2 - \frac{1}{2}\ (10)(3.77)$

$[49 – 25.46]\ \Delta x = 200\ \Delta x^2 - 18.85 \quad \rightarrow 200\ \Delta x^2 - 23.54\Delta x - 18.85 = 0$

Recordando que la solución de una ecuación de segundo grado es:

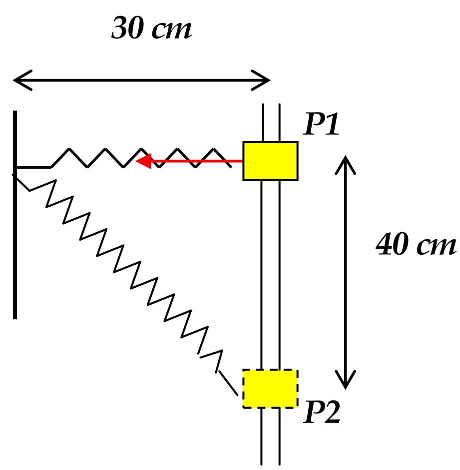
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow \Delta x = \frac{23.54 \pm \sqrt{23.54^2 + 4(200)(18.85)}}{2(200)}$$

$$\Delta x = \frac{23.54 \pm \sqrt{554.13 + 15080)}}{400} = \frac{23.54 \pm 125.04}{400} = 0.37$$

Respuesta: La velocidad con que llega el bloque al resorte es de 1.94 m/sg y el resorte se comprime 37 cm

EJEMPLO 3-4:

Un collar de 10 kg se desliza (sin rozamiento) en una varilla vertical . El resorte tiene una longitud natural de 20 cm y una constante de 500 Nt/m . Si el collar parte del reposo en posición horizontal, determinar su velocidad después de haber recorrido 40 cm hacia abajo.



Solución: Se aplica el principio de conservación de energía.

(a) Punto P1: $x_1 = 30\text{ cm} - 20\text{ cm} = 10\text{ cm} = 0.1\text{ m}$; $y_1 = 0$; $v_1 = 0$

Energía potencial elástica: V_{1e} = ½ k x_1^2 = ½ $(500)(0.1)^2$ = (250)(0.01) = 2,5 joules

Energía potencial gravitatoria: $V_{1g} = mgy_1 = 0$

Energía cinética : $K_1 = ½\ m\ v_1^2 = 0$

(b) Punto P2: x_2 = 50 cm – 20 cm = 30 cm = 0.3 m; y_2 =- 40 cm = - 0.4 m; $v_2 = v$

Energía potencial elástica: V_{2e}= ½ k x_2^2 = ½ $(500)(0.3)^2$ = (250)(0.09) = 22,5 joules

Energía potencial gravitatoria: $V_{2g} = mgy_2 = (10)(9.8)(-0.4) = -39.2$ joules

Energía cinética : $K_2 = ½\ m\ v_2^2 = ½\ (10)\ v^2 = 5\ v^2$

(c) Conservación de energía:

$V_{1e} + V_{1g} + K_1 = V_{2e} + V_{2g} + K_2$

$2.5 + 0 + 0 = 22.5 - 39.2 + 5v^2 \Rightarrow v^2 = 3.84 \Rightarrow \underline{v = 1.96 \text{ m/sg}}$

Respuesta: La velocidad del bloque en el punto2 después de haber bajado 40 cm es de 1.96 m/sg

3.4 IMPULSO Y MOMENTUM.

Por segunda ley de Newton se conoce que : F = m a = m (dv / dt), despejando,

F dt = m dv, o sea que, integrando:

$$\int_{t1}^{t2} Fdt = \int_{v1}^{v2} mdv \Rightarrow \int_{t1}^{t2} Fdt = mv_2 - mv_1$$

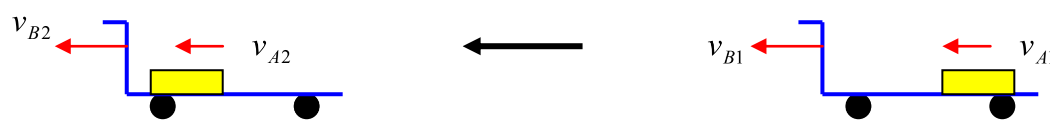
Donde,

$$\boxed{\begin{array}{l} \int_{t1}^{t2} Fdt = impulso = \sum F\Delta t \\ mv = momentum\ \ o\ \ \ cantidad\, de\, movimiento \end{array}}$$

El impulso es igual al cambio de la cantidad de movimiento. Si no hay fuerza externa aplicada el momentum o cantidad de movimiento se conserva.

EJEMPLO 3-5:

Se lanza sobre un cargador de 80 kg una maleta de 40 kg con una velocidad de 5 m /sg. Si el cargador puede deslizarse libremente e inicialmente está en reposo, calcular la velocidad del cargador después que la maleta se detiene dentro el cargador.



Solución:

Variables conocidas: $m_A = 40$ kg, $m_B = 80$ kg, $v_{A1} = 5$ m/sg, $v_{B1} = 0$

$v_{A2} = v_{B2} = v = ?$

No hay fuerzas externas entonces la cantidad de movimiento se conserva:

$m_A v_{A1} + m_B v_{B1} = m_A v_{A2} + m_B v_{B2} = (m_A v + m_B v) = (m_A + m_B) v$

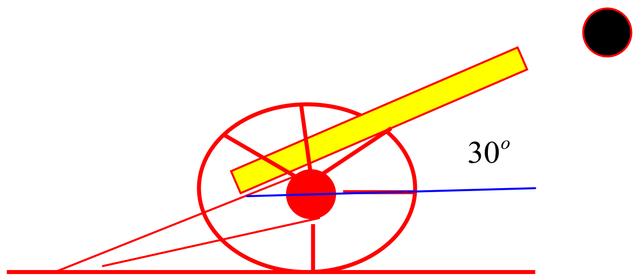
Reemplazando,

$(40)(5) + (80)(0) = (80 + 40)\, v \Rightarrow \quad v = 200 / 120 = 1.67$ m/sg

Respuesta : La velocidad del cargador cuando la maleta se detiene es igual a 1.67 m/sg

EJEMPLO 3-6:

Un cañón de 2 toneladas dispara una bomba de 10 kg con una velocidad de 500 m/sg y una inclinación de 30º. Calcular la velocidad de retroceso del cañón.



(a) Movimiento de la bomba:

Si la bomba parte del reposo y adquiere una velocidad es porque hubo una fuerza externa o sea un impulso. Su ecuación es por tanto,

$m_b\, v_{b1} + F\Delta t = m_b\, v_{b2}$

$(10)(0) + +F\Delta t = (10)500) \Rightarrow\ F\Delta t = 5000$ kg. m/sg

(b) Movimiento del cañón:

El disparo de la bomba hace retroceder al cañón , se debe calcular esta velocidad. El cañón inicialmente está en reposo,

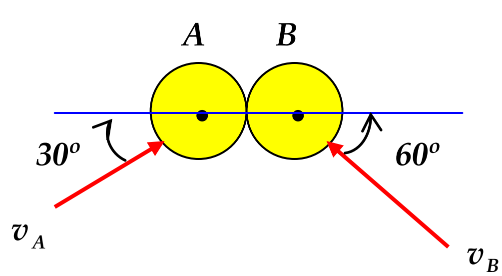
$m_c\, v_{c1} + F\Delta t \cos 30^o = m_c\, v_{c2}$ $\quad m_c = 2$ ton $= 2000$ kg

$(2000)(0) + (5000)(0.866) = (2000)v_{c2} \Rightarrow\ v_{c2} = 4330 / 2000 = 2.17$ m/sg

<u>Respuesta:</u> La velocidad de retroceso del cañón es igual a 2.17 m/sg

EJEMPLO 3-7:

Dos bolas idénticas chocan con las velocidades $v_A = 9$ m/sg y $v_B = 12$ m/sg en las direcciones que se indican en la figura. Si el coeficiente de restitución e = 0.9, encontrar la velocidad de las bolas después del choque.



Solución :

Las bolas al chocar sufren una deformación que se caracteriza por su coeficiente de restitución e. Si el choque es completamente inelástico e = 0 y si el choque es completamente elástico e = 1.

(a) Velocidades antes del choque:

$v_{Ax} = v_A \cos 30^o = (9 \text{ m/sg})(0.866) = 7.79 \text{ m/sg}$
$v_{Ay} = v_A \text{ sen } 30^o = (9 \text{ m/sg})(0.5) = 4.5 \text{ m/sg}$

$v_{Bx} = - v_B \cos 60^o = -(12 \text{ m/sg})(0.5) = -6.0 \text{ m/sg}$
$v_{By} = v_B \text{ sen } 60^o = (12 \text{ m/sg})(0.866) = 10.39 \text{ m/sg}$

(b) Velocidades después del choque:

En sentido vertical no se ejercen fuerzas en las bolas por tanto, la velocidad después del choque es igual al velocidad antes del choque.

$v_{Ay} = v'_{Ay} \quad \rightarrow \quad \underline{v'_{Ay} = 4.5 \text{ m/sg}}$
$v_{By} = v'_{By} \quad \rightarrow \quad \underline{v'_{By} = 10.39 \text{ m/sg}}$

En sentido horizontal, si existen fuerzas que en el tiempo de contacto producen un impulso interno en cada una de las bolas. Las ecuaciones para este caso serían:

Conservación del momentum antes y después del choque,

$m\, v_{Ax} + m\, v_{Bx} = m\, v'_{Ax} + m\, v'_{Bx}$, simplificando m

$v_{Ax} + v_{Bx} = v'_{Ax} + v'_{Bx}$, reemplazando

$7.79 - 6.0 = = v'_{Ax} + v'_{Bx} \quad \rightarrow \quad v'_{Ax} + v'_{Bx} = 1.79 \text{ m/sg} \quad (1)$

Velocidades relativas antes y después del choque:

$v'_{Bx} - v'_{Ax} = e\,(v_{Ax} - v_{Bx})$, reemplazando

$v'_{Bx} - v'_{Ax} = 0.9\,(7.79 + 6.0) \quad \rightarrow \quad v'_{Bx} - v'_{Ax} = 12.41 \text{ m/sg} \quad (2)$

sumando (1) con (2) se tiene:

$2\, v'_{Bx} = 1.79 + 12.41 \quad \rightarrow \quad \underline{v'_{Bx} = 7.1 \text{ m/sg}}$
Reemplazando este valor en (1):

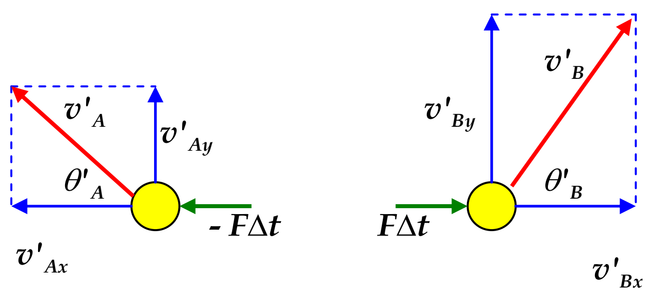
v'_{Ax} = 1.79 - v'_{Bx} = 1.79 -7.1 → $\underline{v'_{Ax} = -5.31 \text{ m/sg}}$

Velocidades después del choque:

$$v'_A = \sqrt{(v'_{Ax})^2 + (v'_{Ay})^2} = \sqrt{(-5.31)^2 + (4.5)^2} = 6.96 \ \ m/sg$$
$$v'_B = \sqrt{(v'_{Bx})^2 + (v'_{By})^2} = \sqrt{(7.1)^2 + (10.39)^2} = 12.58 \ \ m/sg$$

θ'_A = arctan(v'_{Ay}/ v'_{Ax}) = arctan(4.5/- 5.31) = arctan(- 0.8474)
→ θ'_A = - 40.3º

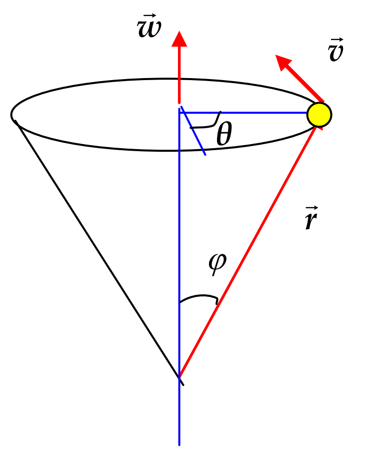
θ'_B = arctan(v'_{By}/ v'_{Bx}) = arctan(10.39/7.1) = arctan(1.4634)
→ θ'_B = 55.6º



4. CINEMÁTICA DEL CUERPO RÍGIDO

El estudio de la cinemática del cuerpo rígido se diferencia del de la partícula porque además de tener en cuenta el movimiento de traslación se debe tener en cuenta el movimiento de rotación.

Un cuerpo rígido en traslación tiene todas sus partículas (puntos) la misma velocidad y la misma aceleración. En rotación todas las partículas rotan alrededor de un eje fijo cuya velocidad tangente a la trayectoria circular depende del ángulo con respecto al eje (φ), del ángulo de desplazamiento angular (θ) y de la distancia al origen (r). Observar la siguiente figura:



$$\vec{v} = \vec{w} \times \vec{r} \qquad (1)$$

$$\Rightarrow v = wr\,sen\,\varphi$$

$$v = r\,sen\,\varphi \frac{d\theta}{dt}$$

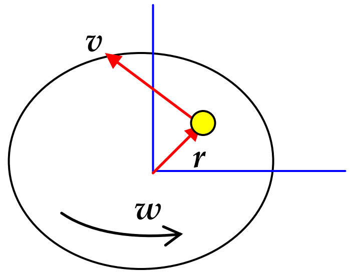
Derivando (1) :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{w}}{dt} \times \vec{r} + \vec{w} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{a} = \vec{a} \times \vec{r} + \vec{w} \times \vec{v}$$

Observe que la velocidad tangencial es el producto vectorial entre la velocidad angular de rotación alrededor del eje y su distancia al origen.

Caso especial: Para el caso de la rotación de una placa alrededor de un eje fijo (plano x-y) φ = 90º y por tanto las ecuaciones se simplifican a :



$$\vec{v} = \vec{w} \times \vec{r} \qquad (1)$$

$$\Rightarrow v = wr$$

$$v = r \frac{d\theta}{dt}$$

Derivando (1) :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{w}}{dt} \times \vec{r} + \vec{w} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{w}}{dt} \times \vec{r} + \vec{w} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\Rightarrow a = r\alpha + wv = r\alpha + (wr)w \Rightarrow a = r\alpha + w^2 r$$

$r\alpha = a_t$ aceleración tangencial
$w^2 r = a_n$ aceleración normal

Caso 1: Rotación uniforme.

Corresponde al caso en que la velocidad de rotación sea constante, o sea que la aceleración angular sea cero. Por comparación al movimiento de traslación:

$\theta = \theta_0 + wt$, donde θ es el desplazamiento angular

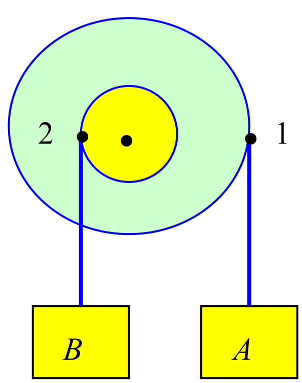
Caso 2: Rotación uniformemente acelerada.

Es la rotación con aceleración angular constante. Por analogía al movimiento traslacional, sus ecuaciones son:

$w = w_0 + \alpha t$
$\theta = w_0 t + ½ \alpha t^2$
$w^2 = w_0^2 + 2 \alpha \theta$

EJEMPLO 4-1:

Dos poleas acopladas a un mismo eje de 1.5 m y 1.0 m tienen dos bloques atados a cuerdas como se indica en la figura. Si el bloque A tiene una aceleración de 3 m/sg^2 y una velocidad inicial de 5 m/sg hacia arriba, determinar (a) La velocidad del bloque B después de 3 seg. (b) El desplazamiento angular de la polea pequeña.



Solución:

(a) La aceleración y velocidad del bloque A es igual a la velocidad y aceleración tangencial del punto 1, entonces:

Condiciones iniciales:

$a_A = a_1 = 3\ m/sg^2$ = constante
$v_{A0} = v_{10} = 5\ m/sg$ = velocidad inicial
$w_{10} = v_{10} / r_1 = (5\ m/sg) / (1.5\ m) = 3.33\ rd/sg$

La velocidad angular de las dos poleas por estar acopladas es la misma, por tanto :

$w_{10} = w_{20} = 3.33\ rd/sg = w_0$

La velocidad inicial del punto 2 es entonces:

$v_{20} = w_0\ r_2 = (3.33\ rd/sg)(1\ m) = 3.33\ m/sg$

Después de 3 segundos:

$v_B = v_2 = w\ r_2$, pero,
$w = w_0 + \alpha\ t$

La aceleración del bloque A es igual a la aceleración tangencial del punto 1:
$a_{t1} = \alpha\ r_1 \rightarrow \alpha = a_{t1} / r_1 = a_A / r_1 = (3\ m/sg^2) / (1.5\ m) = 2\ rd/sg^2$

Reemplazando:

$w = 3.33\ rd/sg + (2\ rd/sg^2)(3\ sg) = 9.33\ rd/sg$
$v_B = v_2 = w\ r_2 = (9.33\ rd/sg)(1\ m) = 9.33\ m/sg$

Respuesta : La velocidad que adquiere el bloque B después de 3 seg es de 9.33 m/sg

(b) El desplazamiento angular es igual a:

$\theta_2 = w_0\ t + ½\ \alpha\ t^2$
$\theta_2 = (3.33)(3) + ½\ (2)(3)2 = 10 + 6 = 16\ rd$

Respuesta : El desplazamiento angular de la polea pequeña es de 16 radianes.