MATEMÁTICAS CON SCILAB

PROFESOR: JORGE ANTONIO POLANÍA

CONTENIDO

1. SISTEMA DE ECUACIONES

OBJETIVOS

1. Entender qué es una función y cómo se grafica
2. Encontrar la solución de un sistema de ecuaciones

1.1 DEFINICIÓN DE UNA FUNCIÓN

Una función asigna un valor a una variable y según un valor dado a una variable x en correspondencia a una relación dada. Por ejemplo,

EJEMPLO 1-1:

$$f(x) = y = x^2$$

La función asigna a y un valor igual al cuadrado del valor de x, esto es, si x = 3, entonces $y = 3^2 = 9$

Generalmente la función se nota como f(x) y se lee f de x. A la variable y se le denomina variable dependiente y a la variable x variable independiente. Al conjunto de los valores x se le denomina dominio de la función y al conjunto de valores de y se le llama codominio.

Para el ejemplo anterior, si el dominio es [0,1, 2, 3, 4 ,5], su codominio es: [0,1,4,9,16,25], son los valores de x elevado al cuadrado.

PROBLEMA 1-1:

¿Cuál será la función que asigna a todo número su quíntuplo ?
Respuesta: (a) y = 2x (b) y = 3x (c) y = 4x (d) y = 5x (e) y = - 5x

1.2 GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Conociendo qué es una función, la variable dependiente, la variable independiente, el dominio y el codominio, ahora vamos a graficarla. Como una función no es más que una colección de pares de números, el trazado de una función consiste en dibujar cada uno de los pares de la misma en el plano cartesiano: eje horizontal para x y eje vertical para y. El dibujo obtenido recibe el nombre de gráfica de la función. Por ejemplo,

EJEMPLO 1-2:

Vamos a graficar $y = x^2$ (parábola)

<u>Solución:</u>

Utilizamos para x lo valores: [-5,-4,-3,-2-1, 0, 1, 2, 3, 4,5], entonces,

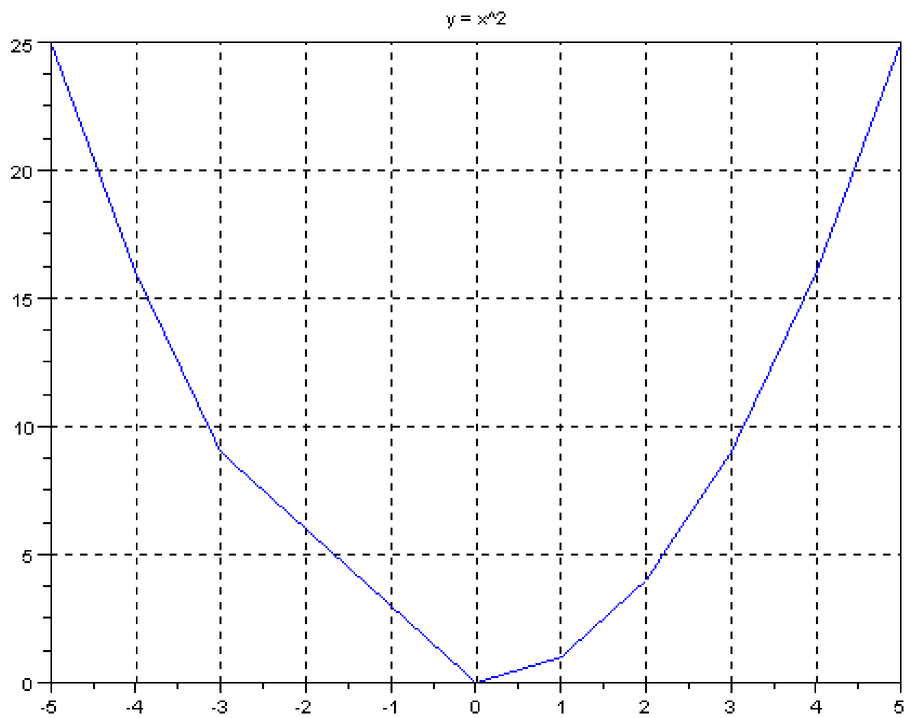
$y = x^2$ = [25,16, 9,4, 1, 0, 1, 4, 9, 16, 25], los valores cuadrados de x

Graficamos las parejas de puntos:

(-5,25),(-4,16),(-3,9),(-2,4),(-1,1),(0,0), (1,1),(2,4),(3,9),(4,16),(5,25).

Realizamos la gráfica aplicando Scilab:

```
-->x=[-5,-4,-3,-2-1, 0, 1, 2, 3, 4,5];

-->y=x^2
 y  =

   25.    16.    9.    9.    0.    1.    4.    9.    16.    25.

-->plot(x,y)

-->xtitle('y = x^2')

-->xgrid
```



PROBLEMA 1-2:

a) Repita el ejemplo anterior para (a) $y = 2x^2$ (b) $y = x^2 +5$ (c) $y = -x^2$.
b) Graficar (a) $y = 3x$, (b) $y = - 3x$ (c) $y = 2x + 1$

1.3 SISTEMA DE ECUACIONES

a) SISTEMAS DE DOS ECUACIONES

Los sistemas de dos ecuaciones se solucionan de forma fácil por sustitución. Esto es, despejar el valor de una variable y remplazarla en la otra ecuación con el fin de dejar una incógnita, o sea, una variable.

EJEMPLO 1-3:

(1) $2x + 3y = 4$
(2) $-3x + 2y = -2$

De la primera (1) ecuación:

$2x = 4 - 3y$, dividiendo por 2: $x = 2 - 1.5y$

Reemplazando la variable x en la ecuación (2),

$-3(2 - 1.5y) + 2y = -2 \Rightarrow -6 + 4.5y + 2y = -2 \Rightarrow 4.5y + 2y = -2 + 6$

$6.5y = 4 \Rightarrow y = 4/6.5 \Rightarrow y = 0.615$

Para encontrar el valor de x se remplaza:

$x = 2 - 1.5y$, entonces, $x = 2 - 1.5(0.615) = 2 - 0.923 \Rightarrow x = 1.077$

La solución es: $x = 0.017$, $y = 0.615$

SOLUCIÓN CON SCILAB:

Escribiendo las ecuaciones igualando a 0,

$2x + 3y - 4 = 0$
$-3x + 2y + 2 = 0$

```
-->// programa en Scilab

-->A = [2 3; - 3 2];

-->b = [- 4; 2];

-->[x] = linsolve(A, b)
```

x =

1.0769231
0.6153846

PROBLEMA1-3:

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

a) $2x - 3y = 2$
b) $x + 2y = -3$

Respuesta: $x = -0.714$, $y = - 1.143$

b) SISTEMAS DE TRES ECUACIONES

A continuación tenemos un sistema de tres ecuaciones, con variables o incógnitas (x, y, z):

$$\begin{aligned} 3x - 5y + z &= 4 \\ -2x + 4y - 3z &= -9 \\ x + 2y + 3z &= 13 \end{aligned}$$

A los números que acompañan las incógnitas se les llaman coeficientes.

1.4 NOTACIÓN MATRICIAL

Veamos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{ll} & \Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow \\ (1) & 3x - 5y + z = 4 \\ (2) & -2x + 4y - 3z = -9 \\ (3) & x + 2y + 3z = 13 \end{array}$$

Una forma fácil de resolver el sistema de ecuaciones es utilizando la metodología de la notación matricial, que consiste en encontrar los determinantes para cada una de las variables y el determinante común.

Determinante común: formado por los coeficientes de las variables x, y, z

$$\Delta = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -2 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Determinante de x: Se reemplazan los coeficientes de x por los coeficientes independientes (lado derecho)

$$\Delta x = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 1 \\ -9 & 4 & -3 \\ 13 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Determinante de y: Se reemplazan los coeficientes de y por los coeficientes independientes (lado derecho)

$$\Delta y = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -2 & -9 & -3 \\ 1 & 13 & 3 \end{bmatrix}$$

Determinante de z: Se remplazan los coeficientes de z por los coeficientes independientes (lado derecho)

$$\Delta z = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 4 \\ -2 & 4 & -9 \\ 1 & 2 & 13 \end{bmatrix}$$

Observar que estos determinantes tienen 3 filas y 3 columnas, o sea, es de orden 3x3.

1.5 REGLA DE CRAMER.

Es una forma práctica de resolver o encontrar la solución a un sistema de ecuaciones. El valor de una variable se obtiene, dividiendo el determinante de la variable por el determinante común. Esto se explica en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1-4:

Dado el sistema de ecuaciones obtener el valor de las variables x, y, z

(1) $3x - 5y + z = 4$
(2) $-2x + 4y - 3z = -9$
(3) $x + 2y + 3z = 13$

Solución:

Paso 1: Primero se debe resolver el determinante común.

$$\Delta = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -2 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Generalmente para calcular un determinante se utiliza la Ley de Sarrus que consiste en repetir las dos primeras filas y multiplicar los coeficientes en forma diagonal de izquierda a derecha y luego de derecha a izquierda cambiando el signo, de la siguiente forma:

$$\Delta = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -2 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ -2 & 4 & -3 \end{bmatrix} =$$

$= (3)(4)(3)+(-2)(2)(1)+(1)(-5)(-3) -(1)(4)(1) -(-3)(2)(3) -(3)(-5)(-2)$

$= 36 - 4 + 15 – 4 + 18 – 30 = 31$

De igual forma: $\Delta x = 62$, $\Delta y = 31$, $\Delta z = 93$ (compruébelo)

Paso 2: Se deben calcular las variables:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{62}{31} = 2, \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{31}{31} = 1, \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{93}{31} = 3$$

Respuesta: La solución del sistema es:

$$x = 2, \quad y = 1, \quad z = 3$$

SOLUCIÓN POR SCILAB:

Se deben colocar las ecuaciones igualadas a 0,

(1) $3x - 5y + z - 4 = 0$
(2) $-2x + 4y - 3z + 9 = 0$
(3) $x + 2y + 3z - 13 = 0$

```
-->A = [3 -5 1; -2 4 -3; 1 2 3];

-->b = [-4; 9; -13];

-->[x] = linsolve (A, b)

 x  =

    2.
   1.
   3.
```

La solución es, x = 2, y = 1, z = 3

PROBLEMA 1-4

Repetir el ejemplo anterior para:

(1) $2x - 3y + 2z = -6$
(2) $3x + 2y - 3z = 10$
(3) $-x - 3y + 2z = -9$

Respuesta: $x = 1, \quad y = 2, \quad z = -1$

PROYECTO 1:

Usando como dominio de -5 a 5, dibuje las rectas en papel cuadriculado en una misma gráfica las funciones:

a) $-x + y = 2$
b) $3x + y = 6$

Demuestre que el punto de corte de las dos gráficas corresponde a la solución del sistema de ecuaciones dadas.

Compruebe con Scilab

2. TRIGONOMETRÍA

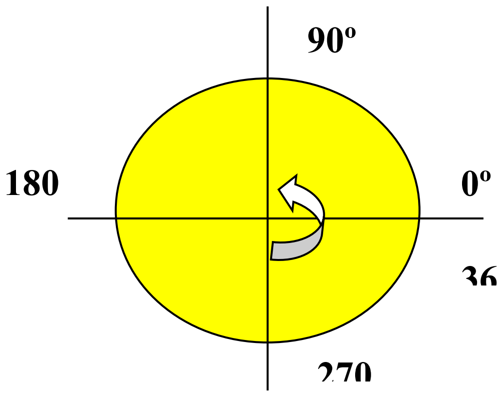
Es la parte de la matemática que estudia las relaciones entre ángulos y lados de un triángulo.

2.1 MEDIDA DE ÁNGULOS

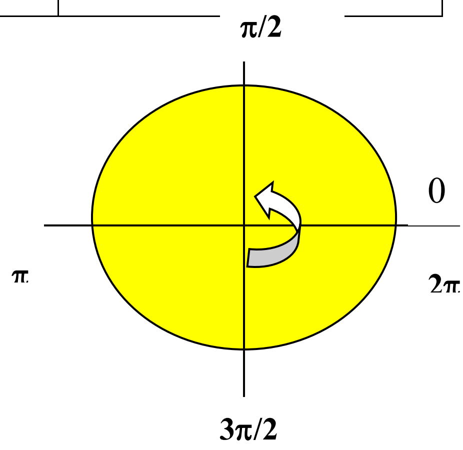
Los ángulos se miden en forma sexagesimal en grados, minutos y segundos partiendo de la base que una circunferencia tiene 360º. Un grado es igual a 60 minutos (1º = 60') y un minuto es igual a 60 segundos (1' = 60").

También se pueden medir los ángulos en radianes cuya medida es igual a la longitud del arco de circunferencia que subtiende, dividido por el valor del radio.

Longitud del arco	Angulo en grados	Angulo en radianes
¼ vuelta	90º	$\pi/2$
½ vuelta	180º	$\pi = 3.14$
¾ vuelta	270º	$3\pi/2$
1 vuelta	360º	2π



GRADOS



RADIANES

EJEMPLO 2-1:

a) Si una puerta se abre 2.5 radianes, esto quiere decir:

Sabiendo que 180º equivalen a 3.14 radianes, entonces:

Grados = 2.5 x (180 º/ 3.14) = 143.2º

La puerta se abrió 143.2º

b) Si ahora se abre a 125º , entonces,

Conociendo que 3.14 radianes equivalen a 180º, entonces:

Radianes = 125º x (3.14/ 180º) = 2.18 rad.

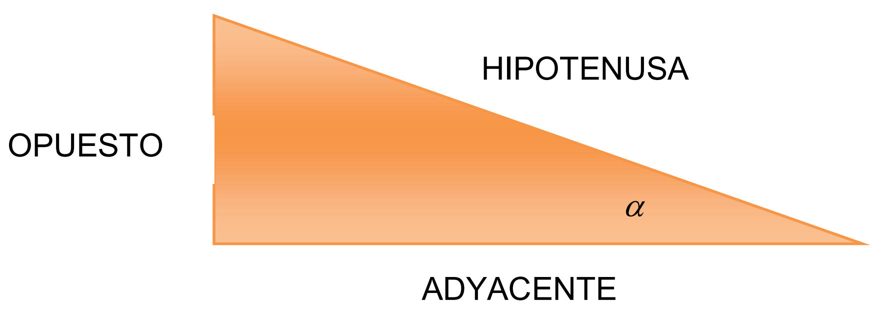
La puerta se abrió un ángulo equivalente a 2.18 radianes

PROBLEMA 2-1

a) suponga que de las 8 AM a las 12 M el sol avanza en el espacio un ángulo de 1.5 radianes. ¿A cuánto corresponde este valor en grados?
b) Un trompo gira 100 vueltas y 60º. ¿A qué equivale este valor en radianes?

2.2 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

El triángulo de la figura es un triángulo rectángulo porque tiene un ángulo de 90º. Se usará este triángulo para definir las funciones trigonométricas respecto al ángulo α.



En un triángulo rectángulo (aquél que tiene un ángulo de 90º), $\text{sen}\alpha$ es la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa, $\cos\alpha$ el la razón entre el cateto adyacente y la hipotenusa y la $\tan\alpha$ es la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente.

$$\text{sen}\alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}}, \quad \cos\alpha = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}}, \quad \tan\alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}}$$

Para un triángulo rectángulo se cumple el Teorema de Pitágoras:

$\text{hipotenusa}^2 = \text{opuesto}^2 + \text{adyacente}^2$

Si valoramos la siguiente expresión, se tiene.

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{\text{opuesto}^2}{\text{hipotenusa}^2} + \frac{\text{adyacente}^2}{\text{hipotenusa}^2} = \frac{\text{opuesto}^2 + \text{adyacente}^2}{\text{hipotenusa}^2} = 1$$

Como conclusión: **$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$**

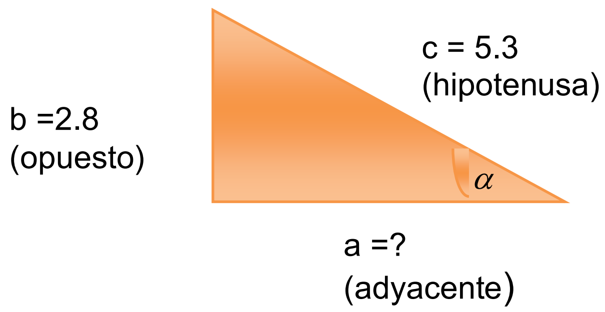
Otras funciones trigonométricas:

Cotangente que es el inverso de la tangente
Secante que es el inverso del coseno
Cosecante que es el inverso del seno

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}, \quad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \quad \csc\alpha = \frac{1}{\text{sen}\alpha}$$

EJEMPLO 2-2

Para el triángulo de la figura las funciones trigonométricas son:



a) Lo primero que tenemos que calcular es el valor de a:

Por el Teorema de Pitágoras: $a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - a^2}$

$$a = \sqrt{5.3^2 - 2.8^2} = \sqrt{28.09 - 7.84} = \sqrt{20.25} = 4.5$$

b) Cálculo de las funciones trigonométricas:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c} = \frac{2.8}{5.3} = 0.5283$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c} = \frac{4.5}{5.3} = 0.8491$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \frac{b}{a} = \frac{2.8}{4.5} = 0.6222$$

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{0.6222} = 1.072$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{0.8491} = 1.1875$$

$$\csc\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{1}{0.5283} = 1.8929$$

USANDO SCILAB:

```
-->// hipotenusa= 5.3 cateto opuesto= 2.8
-->c = 5.3;
-->b = 2.8;
-->// cateto adyacente
-->a = sqrt(c^2 - b^2)

a  =
    4.5

-->// ángulo en radianes
-->alfa= asin(b/c);
-->// funciones trigonométricas
-->sin(alfa)
```

```
 ans  =
   0.5283019

-->cos(alfa)
 ans  =

   0.8490566

-->tan(alfa)
 ans  =

   0.6222222

-->cotg(alfa)
 ans  =

   1.6071429

-->sec(alfa)
 ans  =

   1.1777778

-->csc(alfa)
 ans  =

   1.8928571
```

2.3 GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

FUNCIÓN SENO:

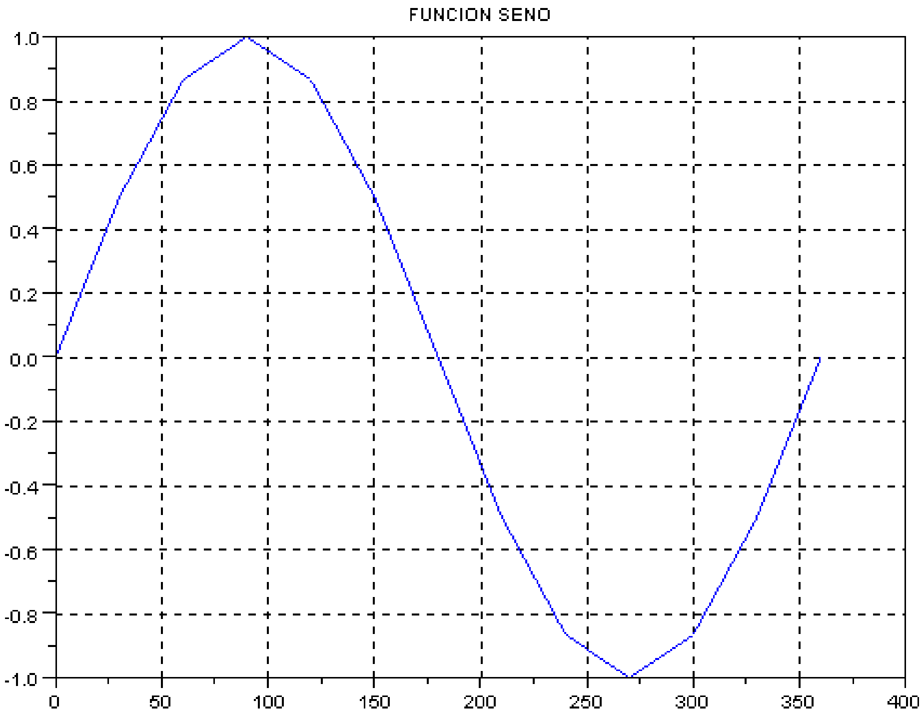
Usando la calculadora complete la siguiente tabla y compruebe la siguiente gráfica para el seno.

α	0º	30º	60º	90º	120º	150º	180º	210º	240º	270º	360º
senα											

Usando Scilab:

```
-->clf
```

```
-->alfa= [0:30:360];

-->alfar= alfa*%pi/180;

-->y=sin(alfar);

-->plot(alfa, y)

-->xgrid

-->xtitle('FUNCION SENO')
```



¿A qué es igual el seno de 0º, 90º, 180º, 270º, 360º?

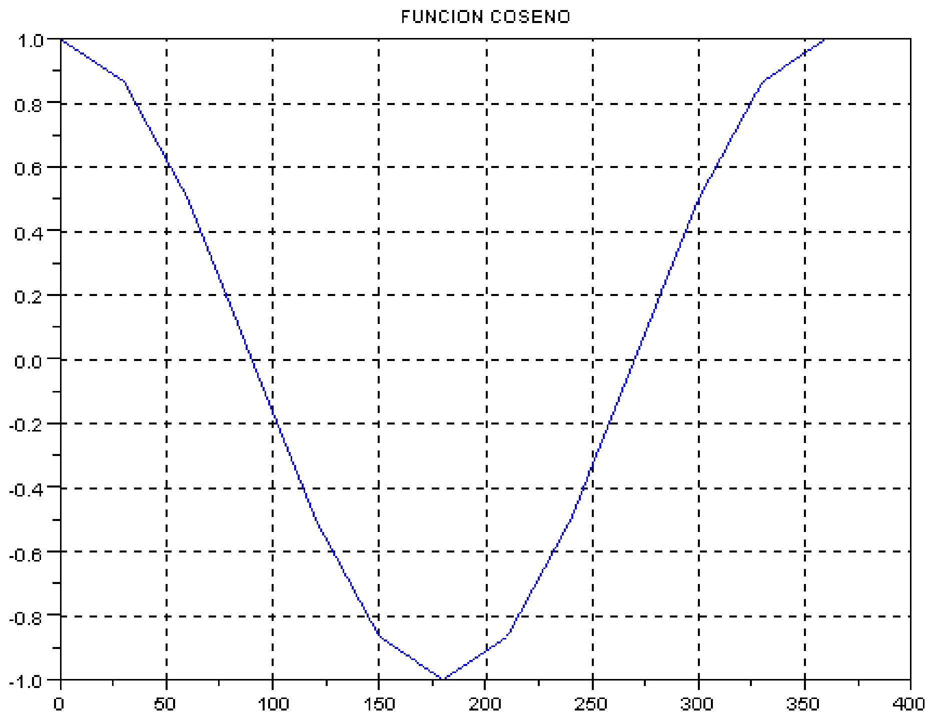
FUNCIÓN COSENO:

Usando la calculadora complete la siguiente tabla y compruebe la siguiente gráfica para el coseno.

α	0º	30º	60º	90º	120º	150º	180º	210º	240º	270º	360º
cosα											

Usando Scilab:

```
-->clf

-->y=cos(alfar);

-->plot(alfa,y)

-->xgrid

-->xtitle('FUNCION COSENO')
```



¿A qué es igual el coseno de 0º, 90º, 180º, 270º, 360º?

EJEMPLO 2-3:

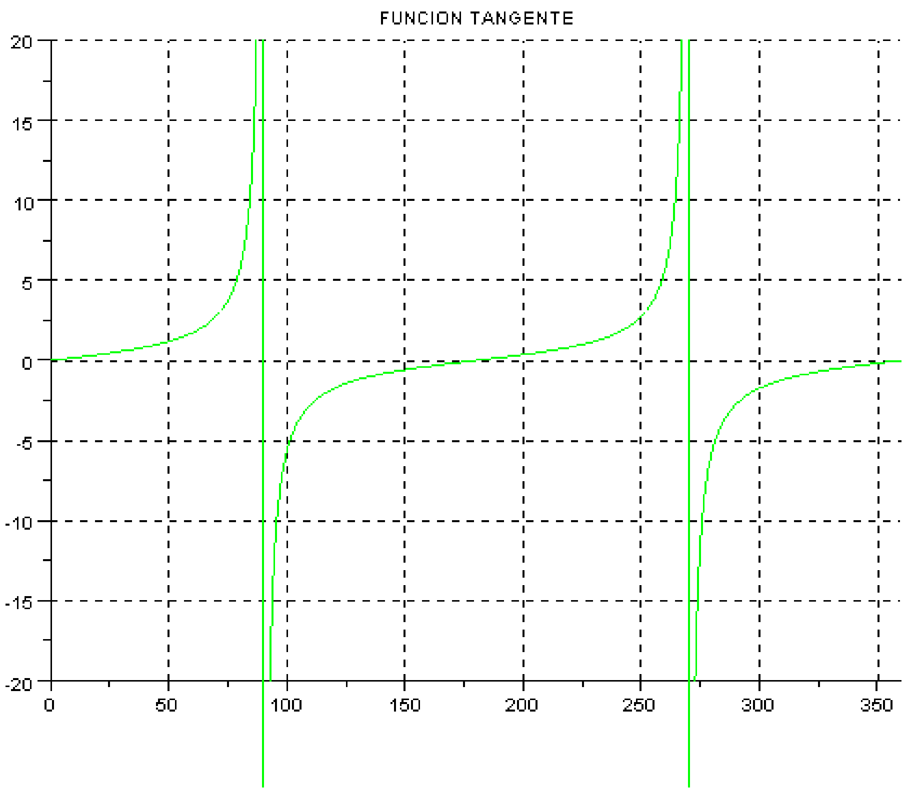
Usando la calculadora complete la siguiente tabla y compruebe la siguiente gráfica para la tangente.

FUNCIÓN TANGENTE:

α	0º	30º	60º	90º	120º	150º	180º	210º	240º	270º	360º
tanα											

Usando Scilab:

```
-->// se requiere mucho más puntos

->alfa=[0: 0.1: 360];

-->alfar=alfa*%pi/180;

-->y=tan(alfar);

-->plot2d(alfa, y, 3, rect=[0 -20 360 20])

-->xgrid

-->xtitle('FUNCION TANGENTE')
```



¿A qué es igual la tangente de 0º, 90º, 180º, 270º, 360º?

PROBLEMA 2-3:

Graficar la función y = 3sen(2x).

2.4 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Las funciones trigonométricas inversas corresponden a los ángulos que las funciones trigonométricas tienen un determinado valor, por ejemplo:

Si el seno de un ángulo es igual a 0.866, esto es, sen α = 0.866, entonces para determinar su ángulo, se hace,

α = arc sen 0.866 = sen^{-1} 0.866 = 60º, esto quiere decir que:

sen 60º = 0.866

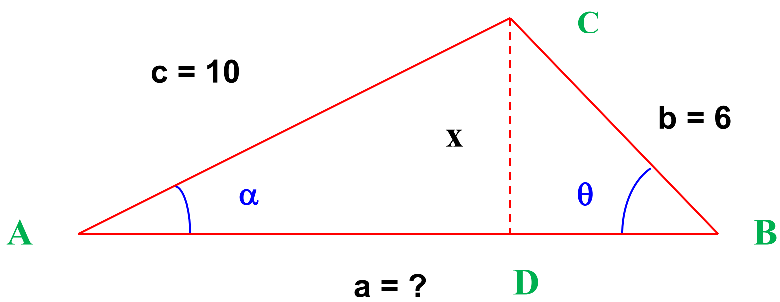
arc sen(x) = sen^{-1}(x) es la función trigonométrica inversa del seno.

Así mismo existen para las demás funciones trigonométricas:

FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA DIRECTA	FUNCIÓN SCILAB DIRECTA	FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA INVERSA	FUNCIÓN SCILAB INVERSA
x = sen α	sin(alfa)	α = arcsen x = sen^{-1}x	asin(alfa)
x = cos α	cos(alfa)	α = arcos x = cos^{-1}x	acos(alfa)
x = tan α	tan(alfa)	α = arctan x = tan^{-1}x	atan(alfa)
x = cot α	cot(alfa)	α = arccot x = cot^{-1}x	acot(alfa)
x = sec α	sec(alfa)	α = arcsec x = sec^{-1}x	asec(alfa)
x = csc α	csc(alfa)	α = arccsc x = csc^{-1}x	acsc(alfa)

EJEMPLO:

Para el triángulo de la figura ABC, c = 10, b = 6, θ = 30º, hallar los valores de **α** y de **a**.



De la figura observamos que:

$$\text{sen}\alpha = \frac{x}{c}, \quad (\text{Triángulo ADC}) \quad y \quad \text{sen}\theta = \frac{x}{b} \quad (\text{Triángulo DBC})$$

Despejando $x = c\,\text{sen}\alpha$, y $x = b\,\text{sen}\theta$

O sea, $c\,\text{sen}\alpha = b\,\text{sen}\theta \quad \Rightarrow \quad \dfrac{c}{\text{sen}\theta} = \dfrac{b}{\text{sen}\alpha}$

Teorema del seno: $\dfrac{c}{\text{sen}\theta} = \dfrac{b}{\text{sen}\alpha}$

a) Para hallar el valor de α, remplazamos valores:

$$\frac{10}{\text{sen}30} = \frac{6}{\text{sen}\alpha} \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\alpha = \frac{6\,\text{sen}30}{10} = \frac{3}{10} = 0.3$$

Función trigonométrica inversa: α = sen $^{-1}$ (0.3) = 17.45º

b) Para hallar el valor de a. Si el ángulo que forman los lados AC y CB es β , entonces, aplicando el Teorema del seno:

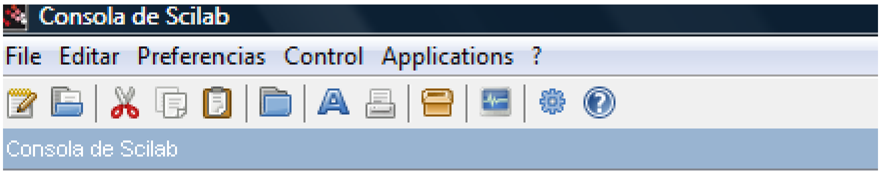
$$\frac{a}{\text{sen}\beta} = \frac{c}{\text{sen}\theta} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{c\,\text{sen}\beta}{\text{sen}\theta}$$

$$\beta = 180º\text{-}(\alpha + \theta) = 180º\text{-}(17.45 + 30) = 180 - 47.45 = 132.55$$

Remplazando:

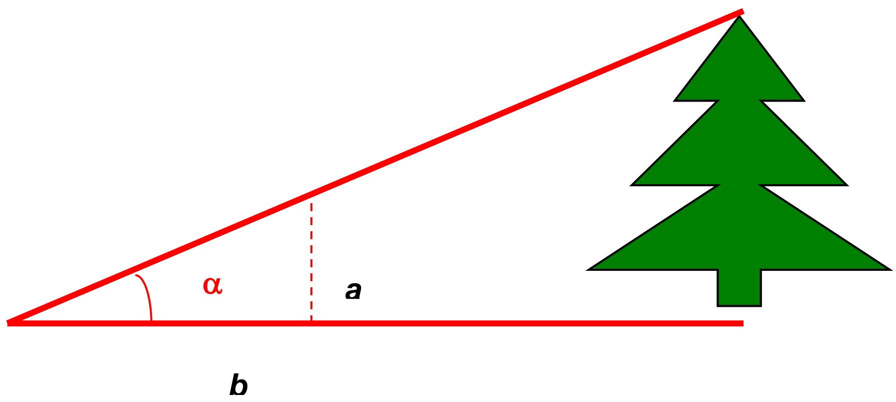
$$a = \frac{10sen(132.55)}{sen(30)} = \frac{7.37}{0.5} = 14.73$$

RESOLVIENDO POR SCILAB




```
-->//Valores conocidos

-->c=10;

-->b=6;

-->tetaG=30;

-->tetaR=tetaG*%pi/180;




-->//Teorema del seno: c/sen(teta)=b/sen(alfa)

-->alfaR=asin(b*sin(tetaR)/c);

-->alfaG=alfa*180/%pi;

-->betaG=180-(alfaG+tetaG)
 betaG  =

    132.5424

-->betaR=betaG*%pi/180;

-->//Teorema del seno: a/sen(beta)=c/sen(teta)

-->a=c*sin(betaR)/sin(tetaR)
 a  =

    14.735544
```

PROBLEMA:



Para medir la altura del árbol se hace la reflexión o método trigonométrico como se indica en la figura. si se miden las distancias a y b de la figura y la distancia x del árbol, hallar la altura y del árbol.

2.5 IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Algunas identidades trigonométricas importantes son:

(1) $\cos\alpha = \text{sen}(90 - \alpha)$

Ejemplo: cos(35) = sen(90-35) = sen(55)

Utilizando calculadora: cos 35 = 0.8191 y sen 55 = 0.8191

(2) $\text{sen}\,\alpha = \cos(90 - \alpha)$

Ejemplo: sen(40) = cos(90- 40) = cos(50)
Utilizando calculadora: sen 40 = 0.6427 y cos 50 = 0.6427

(3) $\text{sen}\,\alpha = \text{sen}(180 - \alpha)$

Ejemplo: sen(120) = sen(180- 60) = sen(60)

Utilizando calculadora: sen 120 = 0.8660 y sen 60 = 0.8660

(4) $-\cos\alpha = \cos(180 - \alpha)$

Ejemplo: cos(120) = cos(180-60) = - cos(60)

Utilizando calculadora: cos 120 = - 0.5 y – cos 60 = - 0.5

(5) $\text{sen } 2\alpha = 2 \text{ sen}\alpha \cos\alpha$

Ejemplo: sen(60) = sen(2x30) = 2sen(30) cos(30)

Utilizando calculadora:

Sen 60 = = 0.8660 = 2(0.5) (0.8660) = 0.8660

(6) sen (a + b) = sen a cos b+ cos a sen b

Ejemplo: sen(90) = sen(30+60) = sen(30) cos(60) + cos(30) sen(60)

Utilizando calculadora:
sen 90 = 1 = (0.5)(0.5) + (0.8660)(0.8660) = 0.25 + 0.75 = 1

(7) cos (a + b) = cos a cos b- sen a sen b

Ejemplo: cos(90) = cos(30+60) = cos(30) cos(60) - sen(30) sen(60)

Utilizando calculadora:

cos 90 = 0 = (0.8660)(0.5) - (0.5)(0.8660) = 0.4330 - 0.4330 = 0

(8) tan (a + b) = (tan a + tan b) / (1 - tan a tan b)

Ejemplo: tan 120 = tan(80+40) = (tan 80 + tan 40) / (1 - tan 80 tan 40)

Utilizando calculadora:

tan 120 = - 1.7305 = (5.6712 + 0.8391) / (1 – 5.6712x0.8391)
= 6.5103 / (1 - 4.7587) = 6.5103 / (- 3.7587) = - 1.7305

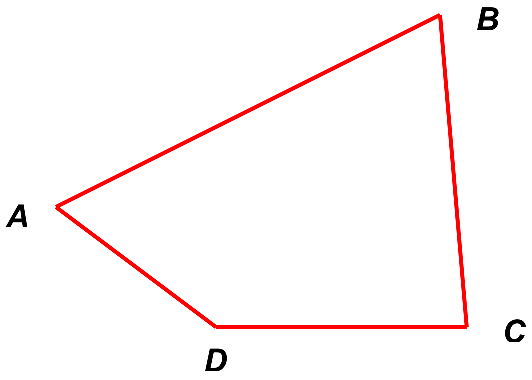
(9) $\tan\alpha = \text{sen } \alpha / \cos \alpha$

Ejemplo: tan 30 = sen 30 / cos 30 = 0.5 / 0.866 = 0.5774

(10) sen(- α) = - sen (α) Ej: sen(-30) = - sen(30) = - 0.5
cos(- α) = cos (α) Ej: cos(-30) = cos(30) = 0.866
tan(-α) = - tan (α) Ej: tan(-30) = - tan (30) = - 0.5774

PROYECTO 2:

Dibuje sobre papel cuadriculado la siguiente figura con las dimensiones: AB = 8.6 cm, BC = 9.0 cm, CD = 5.9 cm, DA = 4.1 cm. Calcular los ángulos internos: DAB, ABC, BCD y CDA. Compruébelo usando un medidor de ángulos



3. GEOMETRÍA ANALÍTICA

3.1 PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

Las coordenadas del punto medio, M, de un segmento cuyos extremos son P (x_0, y_0) y Q (x_1, y_1) vienen dadas por:

$$\mathbf{M}\left(\frac{\mathbf{x0}+\mathbf{x1}}{\mathbf{2}},\frac{\mathbf{y0}+\mathbf{y1}}{\mathbf{2}}\right)$$

Ejemplo:

Calcular el punto medio del segmento dado por los puntos:
P(1, 2) y Q(5, 8).

El punto medio M es: x0=1, y0=2, x1=5, y1=8
(x0 + x1) /2 = (1 + 5) / 2 = 3
(y0 + y1) /2 = (2 + 8) / 2 = 5, entonces, el punto medio es: M(3,5)

3.2 PENDIENTE DE UNA RECTA

Se llama pendiente de una recta a la tangente del ángulo que forma la recta con el semieje positivo de abscisas medido siempre en sentido contrario al de las agujas de un reloj.

La pendiente de la recta es la tangente del ángulo.

Al ángulo se le llama inclinación de la recta.

Si se conocen dos puntos de la recta,

P1(x1, y1) ; P2(x2, y2)

la pendiente es igual a :

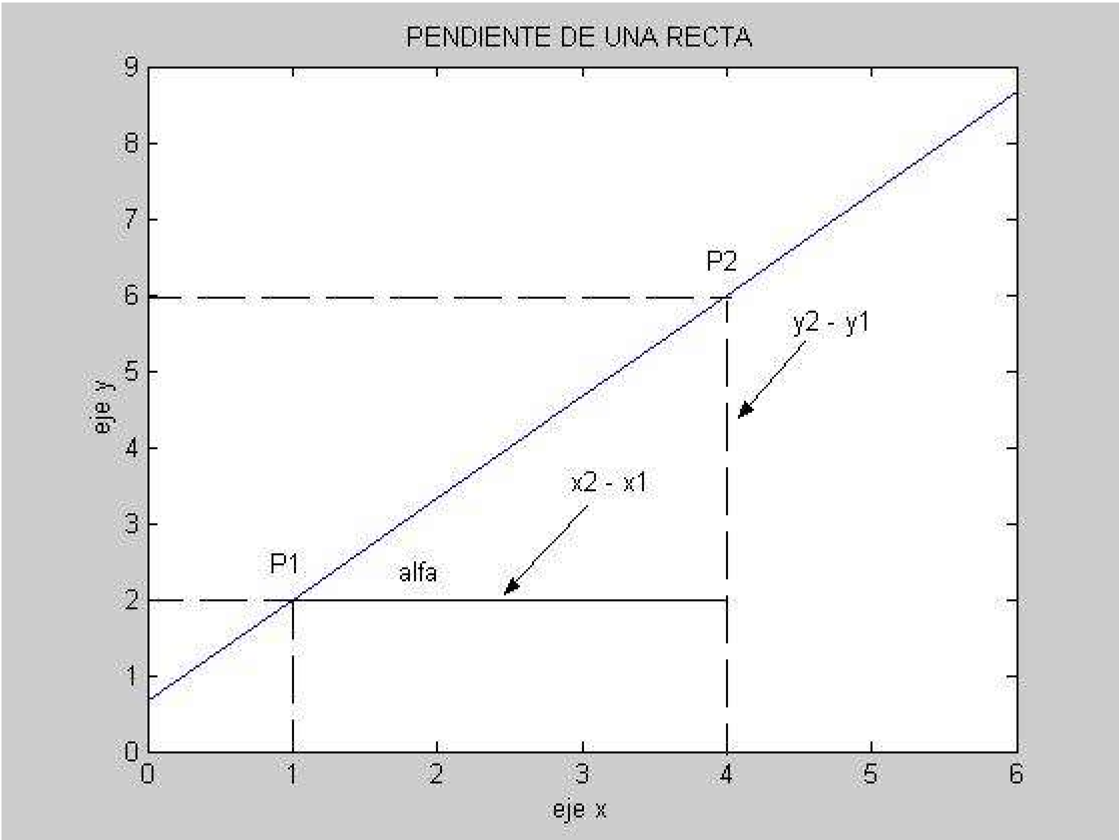
$$m = \tan(\alpha) = \frac{y2 - y1}{x2 - x1}$$

Ejemplo:

Sea P1(1, 2) y P2(4, 6) dos puntos de una recta, encontrar la pendiente y el ángulo de inclinación.

Se tiene y2= 6, y1= 2, x2= 4, x1= 1, luego,

$$\mathrm{m} = \frac{6-2}{4-1} = \frac{4}{3} = \tan(\alpha)\,, \text{entonces,} \qquad \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 53^{0}$$



3.3 ECUACIÓN DE UNA DE RECTA

Caso 1: Se conoce un punto y la pendiente. La ecuación de una recta que pasa por el punto P (x0, y0) y tiene como pendiente m es:

$$y - y0 = m\,(x - x0)$$

Ejemplo:

Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto (2, - 3) y tiene una inclinación de 45º.

La pendiente de la recta es:
$m = \tan 45º = 1.0$

Las coordenadas del punto son:
$y0 = -3$, $x0 = 2$, entonces,

la ecuación de la recta es:

$y - y0 = m(x - x0)$

$y - (-3) = 1.0(x - 2)$

$y + 3 = x - 2$, despejando y,

$y = x - 2 - 3$, entonces, $y = x - 5$

Caso 2: Se conocen dos puntos. La recta pasa por los puntos

P1(x1, y1) y P2(x2, y2). La ecuación es:

$y - y1 = m(x - x1)$ donde ,

$$m = \frac{y2 - y1}{x2 - x1}$$ (Pendiente de la recta)

3.4 PUNTO DE INTERSECCIÓN ENTRE DOS RECTAS

Si dos rectas se cortan en un punto, este punto es la solución de las ecuaciones de las rectas.

Ejemplo:

Hallar el punto de intersección de las rectas cuyas ecuaciones son:

$$2x + 3y = 8$$
$$x + 2y = 5$$

Solución:

Se resuelve el sistema de ecuaciones por determinantes:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{16 - 15}{4 - 3} = \frac{1}{1} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{10 - 8}{4 - 3} = \frac{2}{1} = 2$$

Respuesta: Las rectas se interceptan en el punto (1,2)

Aplicando Scilab:

Igualar las ecuaciones a 0,

$2x + 3y - 8 = 0$ y

$x + 2y - 5 = 0$

```
-->A= [ 2 3; 1 2];

-->b= [- 8; - 5];

-->[x] = linsolve(A, b)

 x  =

    1.
    2.
```

3.5 DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

La distancia entre los puntos P(x1, y1) y Q(x2, y2) viene expresada por la fórmula:

$$d(P,Q) = \sqrt{(x2 - x1)^2 + (y2 - y1)^2}$$

Ejemplo:

Encontrar la distancia entre los puntos P(3,2) y Q(6,9).
$x1 = 3$, $y1 = 2$, $x2 = 6$, $y2 = 9$

Aplicando la fórmula, se tiene:

$$d(P,Q) = \sqrt{(6-3)^2 + (9-2)^2} = \sqrt{3^2 + 7^2} = \sqrt{9+49} = \sqrt{58} = 7.61$$

1.6 LUGARES GEOMÉTRICOS

Se llama lugar geométrico a cualquier conjunto de puntos que vienen caracterizados por una cierta propiedad.

Por ejemplo, el lugar geométrico de los puntos del plano que se encuentran a distancia fija r de un punto señalado, O, es la circunferencia centrada en O y con radio r .

El lugar geométrico de los puntos del plano que divide un ángulo en dos partes iguales es su bisectriz.

El lugar geométrico de los puntos en el espacio que se encuentran a distancia fija de una recta, es un conjunto de puntos formado un cilindro.

En cualquiera de los casos de los citados anteriormente y muchos otros, el lugar geométrico se define mediante una ecuación que relaciona los puntos (x, y) en el plano o los puntos (x, y, z) en el espacio.

Ejemplo.

Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos que equidistan de los puntos A y B (mediatriz) A(3, 4) y B(- 3, 6).

Solución:

Se elige un punto arbitrario P(x, y).

La distancia entre el punto P y el punto A es igual a:

$$d(P, A) = \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2}$$

La distancia entre el punto P y el punto B es igual a:

$d(P, B) = \sqrt{(x - (-3))^2 + (y - 6)^2}$

La condición para que el punto pertenezca a la mediatriz es que ambas distancias sean iguales, entonces:

$$\sqrt{(x - 3)^2 + (y - 4)^2} = \sqrt{(x - (-3))^2 + (y - 6)^2}$$

Elevando al cuadrado se elimina el radical, por tanto,

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = (x - (-3))^2 + (y - 6)^2$$
$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = (x + 3)^2 + (y - 6)^2$$

Resolviendo los cuadrados, recuérdese que:

$\mathbf{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$ **,** $\mathbf{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$

$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = x^2 + 6x + 9 + y2 - 12y + 36$

entonces : $- 12x + 4y - 20 = 0$

La ecuación de la mediatriz es $- 12x + 4y - 20 = 0$.

Ejemplo.

Hallar la ecuación de la circunferencia centrada en O(2, 4) y de radio 6.

Solución:

Se toma un punto genérico P(x, y)

La distancia entre el punto X y el punto O es igual a:

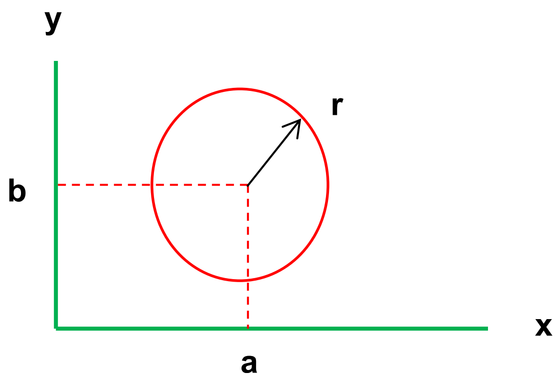
$d(P, O) = \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 4)^2} = \text{radio} = 6$

La ecuación de la circunferencia es, elevando al cuadrado:

$$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 36$$

En general, la ecuación de una circunferencia que tiene su origen en el punto O(a, b) y radio = r es:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$



4. VECTORES

El estudio de vectores hace parte de la matemática básica que debe conocer todo técnico o ingeniero como herramienta útil en el diseño. Los fenómenos físicos se caracterizan por tener representaciones en magnitudes escalares y magnitudes vectoriales. Las magnitudes escalares son aquellas en que sólo influye su tamaño. Por el contrario, se consideran magnitudes vectoriales aquellas en las que, de alguna manera, influyen la dirección y el sentido en que se aplican.

Como ejemplos de magnitudes escalares se pueden citar la masa de un cuerpo, la temperatura, el volumen, etc. En estos casos sólo importa su valor.

Magnitudes vectoriales o vectores son por ejemplo, la fuerza, posición, velocidad, aceleración, etc. En este caso la magnitud se aplica en una dirección determinada con un sentido dado. No es lo mismo desplazamiento de 10 km hacia el noreste que desplazamiento de estos mismos 10 km (magnitud) hacia el sureste pues se llega a puntos finales distintos.

4.1 DEFINICIÓN

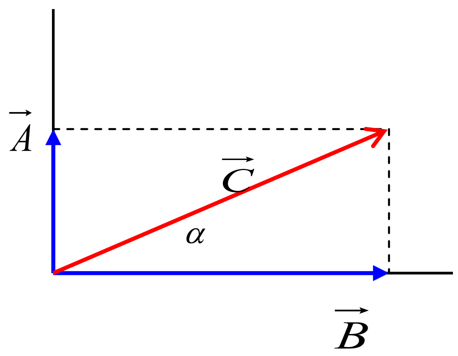
Un vector es un segmento cuyos extremos están dados en un cierto sentido. Se representa por $\overline{AB}$, siendo los extremos los puntos A y B

Los puntos en los que empieza y termina un vector se llaman origen y extremo, respectivamente y su magnitud es la longitud del segmento que lo define. La dirección la define el ángulo con respecto al eje positivo de las x´s y el sentido lo da la flecha del vector. Si los vectores tienen igual dirección son vectores paralelos.

4.2 SUMA DE VECTORES

LEY DEL PARALELOGRAMO

Es el método utilizado cuando los vectores dados son perpendiculares entre sí.



$$\vec{C} = \left|\vec{A} + \vec{B}\right| = \sqrt{A^2 + B^2}$$

Ejemplo:

Sea la magnitud del vector $\overline{A}$ = 3 y del vector $\overline{B}$ = 7,

entonces la magnitud del vector resultante es :

$$C = \sqrt{3^2 + 7^2} = \sqrt{9 + 49} = \sqrt{58} = 7.61$$

Para encontrar la dirección del vector se utiliza la función trigonométrica tangente que como se recuerda es igual a :

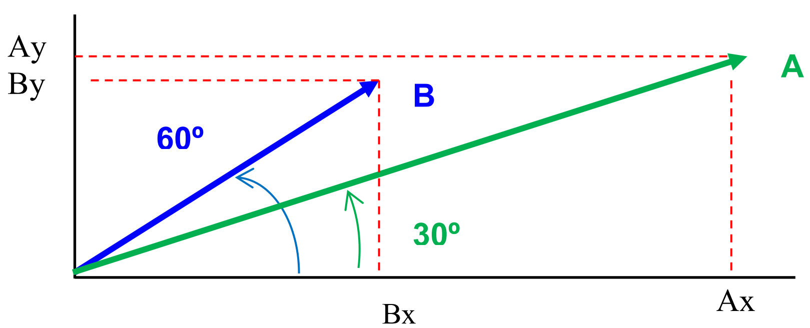
opuesto / adyacente

tan α = A / B = 3 / 7 = 0.4285, entonces,
α = arctan 0.4285 = 23.2º

DESCOMPOSICIÓN DE VECTORES

Cuando los vectores no son ortogonales (perpendiculares) cada uno de ellos se descompone en componentes x y componentes y.

Ejemplo:



De la figura se tiene que:

$A_x = A \cos 30º$ y $A_y = A \text{ sen } 30º$

$B_x = B \cos 60º$ y $B_y = B \text{ sen } 60º$

Ahora se pueden sumar las componentes:

$C_x = A_x + B_x$ y $C_y = A_y + B_y$

$C_x = A \cos 30 + B \cos 60$ y $C_y = A \text{ sen } 30 + B \text{ sen } 60$

Si A = 12 y B = 8, entonces ,

$C_x = 12 \cos 30 + 8 \cos 60$ y $C_y = 12 \text{ sen } 30 + 8 \text{ sen } 60$

$C_x = 12\ (0.866) + 8\ (0.5)$ y $C_y = 12\ (0.5) + 8\ (0.866)$

$C_x = 10.382 + 4 = 14.382$ y $C_y = 6 + 6.928 = 12.928$

La magnitud del vector resultante es:

$$C = C_x^2 + C_y^2 = \sqrt{14.382^2 + 12.928^2} = 19.34$$

y su dirección:

Φ = arc tan (C_y / C_x) = arc tan (12.928 / 14.382)

= arc tan (0.9025) = 42º

APLICANDO SCILAB:

```
//ángulos en grados

tetaG= 60;

alfaG= 30;

//ángulos en radianes

tetaR= tetaG * %pi /180;

alfaR=alfaG * %pi /180;
```

```
//valores de los vectores
A=12; B=8;
//componentes de A
Ax=A*cos(alfaR);
Ay=A*sin(alfaR);
//componentes de B
Bx=B*cos(tetaR);
By=B*sin(tetaR);
//componentes del vector resultante
Cx=Ax+Bx;
Cy=Ay+By;
//magnitud del vector resultante
C= sqrt(Cx^2+Cy^2)
//ángulo del vector resultante
fiR= atan(Cy/Cx);
//ángulo en grados
figG=fiR*180/%pi
```

Respuesta: C=19.346237, φ = 41.932463

4.3 PRODUCTO ESCALAR

Dados dos vectores, se llama producto escalar al número obtenido como producto de sus magnitudes por el coseno del ángulo que forman:

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = AB\cos\alpha$$

Para el ejemplo anterior el producto punto escalar es igual a:

12(8) cos(60 - 30) = 96 cos 30º = 96(0.866) = 83.19

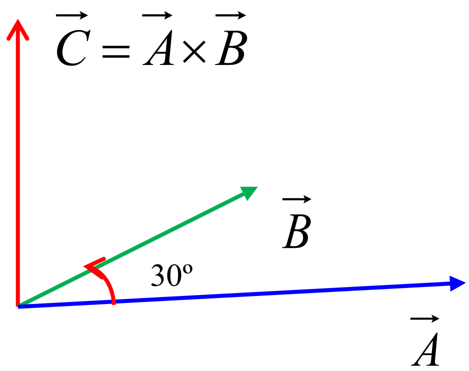
4.4 PRODUCTO VECTORIAL

El producto vectorial de dos vectores, es otro vector $\bar{\mathbf{C}}$ perpendicular al plano formado por los vectores cuya magnitud $|C|$ es igual al producto de las magnitudes multiplicado por el seno del ángulo que lo forman:

$$|\mathbf{C}| = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}\,\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{AB}\,\mathbf{sen}\,\boldsymbol{\alpha}$$

Para el ejemplo anterior el producto vectorial tiene una magnitud de:

C = 12(8) sen(60 - 30) = 96 sen 30º = 96(0.5) = 48



5. NÚMEROS COMPLEJOS

5.1 DEFINICIÓN

Hay ecuaciones de segundo grado que no tienen ninguna solución con números reales como por ejemplo, la ecuación,

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Tiene como solución:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo:

$x^2 + 4x + 5 = 0$

Su solución es:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(5)}}{2} \qquad x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

Como no se puede sacar raíz cuadrada a números negativos, su solución a este problema es considerar números imaginarios los se notan con la letra **i** cuyo cuadrado es igual a – 1, o sea que,

$$\boldsymbol{i = \sqrt{-1}}$$

Un número complejo es un número compuesto por una parte real y una parte imaginaria, por ejemplo, 3 + 4i

Continuando con el ejemplo anterior de la ecuación cuadrática, se tiene:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \qquad x = \frac{-4 \pm \sqrt{4}\sqrt{-1}}{2} \qquad x = \frac{-4 \pm 2i}{2}$$

x1 = - 2 + i   y   x2= - 2 - i (número complejo)

APLICANDO SCILAB:

```
-->// polinomio de la ecuación  x^2 + 4 x + 5 = 0

 -->p = [1 4 5];

-->r = roots(p)
 r  =

  - 2. + i
  - 2. – i
```

5.2 SUMA Y PRODUCTO DE NÚMEROS COMPLEJOS

Dados dos números complejos a + b i y c + d i se definen su suma y su producto como sigue:

Suma: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

Multiplicación: $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)\,i$

El producto puede hacerse operando con i como si fuese un número real y teniendo en cuenta que **$i^2 = -1$.**

Ejemplo:

a) Sumar los siguientes números complejos: c = a + b

c = (3 + 4i) + (5 – 2i)

se suman los números reales por aparte y luego los imaginarios,

c = (3 + 5) + (4i – 2i) = 8 + 2i

Con Scilab:

```
-->a = 3+4 * %i;

-->b = 5 - 2 * %i;

-->c = a + b
```

```
 c  =

    8. + 2.i
```

b) Multiplicar los anteriores números complejos:

c = (3 + 4i) (5 – 2i)

c = 3(5) + 3(- 2i) + 4i(5) + 4i(- 2i) = 15 – 6i + 20i -8 (i^2)

c = 15 – 6i + 20i - 8(- 1) = 15 - 6i +20i + 8

sumando reales e imaginarios como en a):

c = (15 + 8) + (- 6i + 20i) = 23 + 14i

Con Scilab:

```
-->a = 3 + 4 * %i;

-->b = 5 - 2 * %i;

-->c = a* b

 c  =

    23. + 14.i
```

5.3 CONJUGADO DE UN NÚMERO COMPLEJO

Se llama conjugado de un número complejo al número complejo que se obtiene al cambiar de signo su parte imaginaria.

Si un número complejo es igual a a + bi su complejo conjugado es igual a a - bi .

El producto de dos números complejos conjugados es igual a .

$$(a + b\,i)\,(a - b\,i) = a^2 + b^2$$

Prueba: $(a + b\,i)\,(a - b\,i) = a^2 - a\,(b\,i) + b\,i(a) - b^2\,(i^2) = a^2 + b^2$

Ejemplo: (2 + 3i) (2 – 3i) = 4 + 9 = 13

5.4 DIVISIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS

Para dividir dos números complejos se multiplica el numerador y el denominador por el complejo conjugado del denominador.

Ejemplo:

Dividir los números complejos: a = 3 + 4i entre b = 5 – 2i

$$\frac{3+4i}{5-2i} = \frac{(3+4i)(5+2i)}{(5-2i)(5+2i)} = \frac{15+6i+20i-8}{5^2+2^2} = \frac{7+26i}{29} = \frac{7}{29} + \frac{26}{29}i$$

c = 0.2413 + 0.8965i

Con Scilab:

```
-->a = 3 + 4* %i;

-->b= 5 - 2* %i;

-->c = a / b

   c  = 0.2413793 + 0.8965517i
```